运筹学与控制论

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2009.03.002

Banach 空间中关于一致 Lipschitzian 映象的一个新结果*

彭再云[1]，龙宪军[2]，王其林[1,3]

(1. 重庆交通大学 理学院 数学与应用数学研究所，重庆 400074；2. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；3. 重庆大学 数理学院，重庆 400030)

摘要：设 E 是一实 Banach 空间，K 为 E 中的一非空闭凸子集，$T_i: K\to K, i=1,2,3$ 为一致 Lipschitzian 连续映象。如果序列 $k_n\subset[1,\infty)$，$k_n\to 1$，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\delta_n\}\in[0,1]$，满足：(i) $\delta_n\to 1(n\to\infty)$；(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$；(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$，$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$；(iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$，对 $x_0\in K$，让 $\{x_n\}$ 满足以下迭代序列 $\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n T_1^n y_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_2^n z_n\\ z_n=(1-\delta_n)x_n+\delta_n T_3^n x_n\end{cases}$，如果存在严格增的函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，$\phi(0)=0$，使得对 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$，$x\in K(i=1,2,3)$ 有 $\langle T_i^n x-x^*, j(x-x^*)\rangle\leqslant k_n\|x-x^*\|-\varphi(\|x-x^*\|)$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*。文章主要结果推广了张石生教授最近文献[1,8]以及文献[6-7]等的主要结果。

关键词：一致 L-Lipschitzian 连续映象；不动点；Banach 空间

中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2009)03-0005-03

1 引言及预备知识

本文始终假定 E 是一实 Banach 空间，E^* 为 E 的对偶空间，K 为 E 的一非空闭凸子集，将正规对偶映象 $J: E\to E^*$ 定义为：$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2,\|f\|=\|x\|\}$，$\forall x\in E$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 E 与 E^* 的对偶对。为了证明本文的主要结果，下面先给出定义及引理。

定义 1[6]　对于映象 $T:K\to K$，(i) 如果 $\exists L>0$，$\forall x,y\in K$，满足 $\|T^n x-T^n y\|\leqslant L\|x-y\|$，$\forall n\geqslant 1$，则称映象 $T:K\to K$ 是一致 L-Lipschitzian 连续的；(ii) 如果 $\exists$ 一序列 $k_n\subset[1,\infty)$，$k_n\to 1$ 使得对于 $\forall x,y\in K$，满足 $\|T^n x-T^n y\|\leqslant k_n\|x-y\|$，$\forall n\geqslant 1$，则称映象 $T:K\to K$ 是渐近非扩张的。

引理 1[3-4]　假设 E 是一实 Banach 空间，$J:E\to E^*$ 是正规对偶映象，则对 $\forall x,y\in E$ 有，$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle$，$\forall j(x+y)\in J(x+y)$。

引理 2[1,3]　设 $\{\theta_n\}$ 是一非负实序列，实序列 $\{\lambda_n\}$ 满足 $0\leqslant\lambda_n\leqslant 1$，$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$，如果存在严格增函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得 $\theta_{n+1}^2\leqslant\theta_n^2-\lambda_n\phi(\theta_{n+1})+\sigma_n$，$\forall n\geqslant n_0$，其中 n_0 为任一非负数，非负序列 $\{\sigma_n\}$ 满足 $\sigma_n=\circ(\lambda_n)$，那么有 $\theta_n\to(n\to\infty)$。

引理 3[1,4]　设非负实序列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足 $a_{n+1}\leqslant(1+\lambda_n)a_n+b_n$，$\forall n\geqslant n_0$，其中序列 $\{\lambda_n\}\in(0,1)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n<\infty$，$\sum_{n=0}^{\infty}b_n<\infty$，那么有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

2 主要结果

这一部分将给出 Banach 空间中关于一致 Lipschitzian 映象的一个新的强收敛定理作为本文的主要结

* 收稿日期：2009-03-10
资助项目：国家自然科学基金(No. 50608072)；重庆市自然科学基金(No. CSTC2007BB0441)；重庆市教委科学技术项目(No. KJ080404)；重庆市高教资助研究项目(No. 0833141)；重庆交通大学青年科学基金研究项目(No. 2008L-03)
作者简介：彭再云，男，讲师，硕士，研究方向为广义凸性、最优化理论与算法。

论。

定理1 设 E 是一实Banach空间,K 为 E 中的一非空闭凸子集,$T_i:K\to K,i=1,2,3$ 为一致 $L_i(i=1,2,3)$ Lipschitzian连续映象且 $x^*\in F(T_1)\cap F(T_2)\cap F(T_3)$,其中 $F(T_i)$ 为 T_i 在 K 中的不动点集。如果序列 $k_n\subset[1,\infty),k_n\to 1$,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$、$\{\delta_n\}\in[0,1]$ 满足:(i) $\delta_n\to 1(n\to\infty)$;(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$,$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$;(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$,$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$;(iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$。对 $x_0\in K$,让 $\{x_n\}$ 满足以下迭代序列

$$\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT_1^ny_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT_2^nz_n\\ z_n=(1-\delta_n)x_n+\delta_nT_3^nx_n\end{cases}\tag{1}$$

如果存在严格增的函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,$\phi(0)=0$ 使得对 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$,$x\in K(i=1,2,3)$,有 $\langle T_i^nx-x^*,j(x-x^*)\rangle\leqslant k_n\|x-x^*\|-\varphi(\|x-x^*\|)$,则 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*。

证明 1) 定义 $L=\max\{L_1,L_2,L_3\}$。下证按(1)式定义的序列 $\{x_n\}$ 是有界的。

由(1)式及引理1,有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(T_1y_n-x^*)\|^2=(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle T_1y_n-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle=(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle T_1x_{n+1}-x^*,j(x_{n+1}-x^*)\rangle+2\alpha_n\langle T_1y_n-T_1^nx_{n+1},j(x_{n+1}-x^*)\rangle=(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\Phi\|x_{n+1}-x^*\|)\}+2\alpha_nL\|y_n-x_{n+1}\|\cdot\|x_{n+1}-x^*\|\tag{2}$$

由 T 的一致Lipschitzian连续性及(1)式,有

$$\|x_{n+1}-y_n\|=\|(1-\alpha_n)(x_n-y_n)+\alpha_n(T_1^ny_n-y_n)\|\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|+\alpha_n\|T_1^ny_n-x^*+x^*-y_n\|\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|+\alpha_n(1+L)\|y_n-x^*\|\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-y_n\|+\alpha_n(1+L)\{\|y_n-x_n\|+\|x_n-x^*\|\}=(1+L\alpha_n)\|x_n-y_n\|+\alpha_n(1+L)\|x_n-x^*\|=\alpha_n(1+L)\|x_n-x^*\|+(1+\alpha_nL)\{\beta_n\|x_n-T_2^nz_n\|\}=\alpha_n(1+L)\|x_n-x^*\|+(1+\alpha_nL)\cdot\{\beta_n\|x_n-x^*+x^*-T_2^nz_n\|\}\leqslant\alpha_n(1+L)\|x_n-x^*\|+(1+\alpha_nL)\beta_n\|x_n-x^*\|+\beta_n(1+L\alpha_n)L\|z_n-x^*\|=\{\alpha_n(1+L)+(1+\alpha_nL)\beta_n\}\|x_n-x^*\|+\beta_n(1+L\alpha_n)L\|z_n-x^*\|\tag{3}$$

同理,可以得到

$$\|z_n-x^*\|=\|(1-\delta_n)(x_n-x^*)+\delta_n(T_3^nx_n-x^*)\|\leqslant(1-\delta_n)\|x_n-x^*\|+\delta_n\|T_3^nx_n-x^*\|\leqslant(1-\delta_n)\|x_n-x^*\|+\delta_nL\|x_n-x^*\|=[\alpha_nL+(1-\delta_n)]\|x_n-x^*\|\tag{4}$$

将(4)式代入(3)式,于是有

$$\|x_{n+1}-y_n\|\leqslant\{\alpha_n(1+L)+(1+\alpha_nL)\beta_n\}\|x_n-x^*\|+\beta_n(1+L\alpha_n)L\|z_n-x^*\|\leqslant\{\alpha_n(1+L)+(1+\alpha_nL)\beta_n\}\|x_n-x^*\|+\beta_n(1+L\alpha_n)L\{\delta_nL+(1-\delta_n)\}\|x_n-x^*\|=\{\beta_n(1+L\alpha_n)[1+L(\delta_nL+1-\delta_n)]+\alpha_n(1+L)\}\|x_n-x^*\|\tag{5}$$

不妨令 $d_n=\beta_n(1+L\alpha_n)[1+L(\delta_nL+1-\delta_n)]+\alpha_n(1+L)$,由条件(i)~(iii)可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nd_n<\infty\tag{6}$$

将(5)式代入(2)式,可得

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\Phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\}+2\alpha_nLd_n\|x_n-x^*\|\cdot\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\{k_n\|x_{n+1}-x^*\|^2-\Phi(\|x_{n+1}-x^*\|)\}+\alpha_nLd_n\{\|x_n-x^*\|^2+\|x_{n+1}-x^*\|^2\}\tag{7}$$

于是有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\frac{A_n}{B_n}\|x_n-x^*\|-\frac{2\alpha_n\Phi(\|x_{n+1}-x^*\|)}{B_n}\tag{8}$$

其中 $A_n=1-2\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_nLd_n$,$B_n=1-(2\alpha_nk_n+\alpha_nLd_n)$。

由 $\alpha_n \to 0(n\to\infty)$,于是存在 n_0 使得 $\frac{1}{2} < B_n \leqslant 1(\forall n \geqslant n_0)$。于是据(7)式,有

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2 \leqslant \{1+2[2\alpha_n(k_n-1)+2Ld_n\alpha_n+\alpha_n^2]\}\|x_n-x^*\|^2-2\alpha_n\Phi(\|x_{n+1}-x^*\|) \leqslant \{1+2[2\alpha_n(k_n-1)+2Ld_n\alpha_n+\alpha_n^2]\}\|x_n-x^*\|^2(\forall n \geqslant n_0) \tag{9}$$

由条件(ii)、(iv)及(6)式,可以得到 $2\sum_{n=0}^{\infty}[2\alpha_n(k_n-1)+2Ld_n\alpha_n+\alpha_n^2]<\infty$,于是由引理3,可知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$ 存在,即 $\|x_n-x^*\|$ 有界。

不失一般性,令 $\|x_n-x^*\| \leqslant M$,其中 M 为正常数。

2)下面证明 $x_n \to x^*$。

在(9)式中,令 $\theta_n=\|x_n-x^*\|$,$\lambda_n=2\alpha_n$,$\sigma_n=2[2\alpha_n(k_n-1)+2Ld_n\alpha_n+\alpha_n^2]M$,于是(9)式可写成 $\theta_{n+1}^2 \leqslant \theta_n^2-\lambda_n\varphi(\theta_{n+1})+\sigma_n,\forall n \geqslant n_0$。由条件(ii)、(iii),显然引理2的条件成立。

于是可得 $\|x_n-x^*\| \to 0$,即 $x_n \to x^*(n\to\infty)$。 证毕

注1 定理1中收敛性结论已从文献[7]中的 Hilbert 空间、文献[1]中的一致光滑的 Banach 空间拓广到一般的 Banach 空间,显然定理1推广了文献[1、6、7、10]的相应结果。

根据定理1,下面的引理可以直接得到。

推论1[8] 设 E 是一实 Banach 空间,K 为 E 中的一非空闭凸子集,$T_i:K\to K,i=1,2$ 为一致 $L_i(i=1,2)$ Lipschitzian 连续映象且 $x^*\in F(T_1)\cap F(T_2)$,其中 $F(T_i)$ 为 T_i 在 K 中的不动点集。如果序列 $k_n\subset[1,\infty)$,$k_n\to 1$,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}\in[0,1]$,满足(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n<\infty$;(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$,(iv) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$。对 $x_0\in K$,让 $\{x_n\}$ 满足以下迭代序列

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n T_1^n y_n \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n T_2^n z_n \end{cases} \tag{10}$$

如果存在严格增的函数 $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$,$\phi(0)=0$,使得对 $\forall j(x+y)\in J(x+y)$,$x\in K(i=1,2)$ 有 $\langle T_i^n x-x^*,j(x-x^*)\rangle \leqslant k_n\|x-x^*\|-\varphi(\|x-x^*\|)$,则 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*。

注2 当 $T_2=E$(恒等映象),同时 $z_n=x_n$ 时,定理1就退化到文献[8]中定理2.1的情形。显然,定理1推广了张石生教授最近文献[8]的相应结果。

参考文献:

[1] Chang S S. Some results for asymptotically pseudo-contractive mappings and asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc,2001,129:845-853.

[2] Chang S S. On Chidume's open questions and approximation solutions of multi-valued strongly accretive mapping equation in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl,1997,216:94-111.

[3] Cho Y J,Kang J I,Zhou H Y. Approximating common fixed points of asymptotically nonexpansive mappings[J]. Bull Korean Math Soc,2005,42:661-670.

[4] Gobel K,Kirk W A. A fixed points theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc,1972,35:171-174.

[5] Moore C,Nnoli B V. Iterative solution of nonlinear equations involving set-valued uniformly accretive operators[J]. Comput Math Appl,2001,42:131-140.

[6] Ofoedu E U. Strong convergence theorem for uniformly L-Lipschitzian asymptotically pseudocontractive mapping in a real Banach space[J]. J Math Anal Appl,2006,321:722-728.

[7] Schu J. Iterative construction of fixed point of asymptotically nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl,1991,158:407-413.

[8] Chang S S,Cho Y J,Kang J I. Some results for L-Lipschitzian mappings in Banach space[J]. ppl Math Leter,2009,22:121-125.

[9] 曾六川. Babach 空间中带误差的修改的 Ishikawa 迭代程序[J]. 数学学报,2004,47:219-228.

[10] 彭再云,唐平. 广义松弛余强制变分不等式体系及二步投影方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24:8-11.

A New Result About Uniformly Lipschitzian Mappings in Banach Space

PENG Zai-yun[1], *LONG Xian-jun*[2], *WANG Qi-lin*[1,3]

(1. Institute of Mathematics, College of Science, Chongqing JiaoTong University, Chongqing 400074;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067;

3. College of Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: Let E be a real Banach space, K be a nonempty closed convex subset of E, $T_i: K\to K, i=1,2,3$ be uniformly Lipschitzian mappings. Let $k_n\subset[1,\infty), k_n\to 1$. Let $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\delta_n\}\in[0,1]$, be two sequences in $[0,1]$ satisfying the following conditions: (i) $\delta_n\to 1(n\to\infty)$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n=\infty$; (iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$; (iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(k_n-1)<\infty$. For any $x_0\in K$, let $\{x_n\}$ be the iterative sequence defined by $\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT_1^ny_n\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT_2^nz_n\\ z_n=(1-\delta_n)x_n+\delta_nT_3^nx_n\end{cases}$. If there exists a strict increasing function $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ with $\varphi(0)=0$ such that $\langle T_i^nx-x^*, j(x-x^*)\rangle\leqslant k_n\|x-x^*\|-\varphi(\|x-x^*\|)$ for $\forall j(x+y)\in J(x+y), x\in K(i=1,2,3)$, then $\{x_n\}$ converges strongly to x^*. The main result in the paper improves the main results in references [1,8] and references [6-7].

Key words: uniformly L-Lipschitzian mapping; fixed point; Banach space

(责任编辑 黄 颖)