DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2009. 03. 011

二值命题逻辑中的蕴涵度量与近似推理*

王廷明
(青岛大学 师范学院,山东 青岛 266071)

摘要:在二值命题逻辑系统中引入公式的真度、条件真度和蕴涵真度概念,为二值命题逻辑系统的程度化研究和近似推理提供了数值化工具。为了讨论基于真度、条件真度和蕴涵真度的近似推理模式的关系问题,以真度概念为基础,在二值命题逻辑系统中引入蕴涵度量概念,并通过蕴涵度量的真度表示式,给出了与有限理论相关的分别基于真度、条件真度和蕴涵真度的伪距离的蕴涵度量表示式,证明了分别基于真度、条件真度和蕴涵真度的近似推理问题可以转化为基于蕴涵度量的近似推理讨论,并给出了蕴涵度量在近似推理中的应用,为二值命题逻辑系统的基于不同真度的近似推理研究提供数值化方法。

关键词:二值命题逻辑;真度;条件真度;伪距离;蕴涵度量
中图分类号:O141.3 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)03-0045-04

在二值命题逻辑系统中,文献[1-4]提出了以数值计算为主要特征的命题公式的真度概念,并以真度为基础定义了公式的相似度和伪距离,建立了逻辑度量空间,从而为二值命题逻辑系统的程度化研究和近似推理理论构建了一种带度量的理论框架。文献[5]基于条件概率的思想,利用真度在二值命题逻辑系统中引入了条件真度的概念,刻画了公式在信息 Γ 下的真确度,即公式的条件真度,初步讨论了基于条件真度的近似推理问题。文献[6]基于蕴涵运算引入了 Γ 蕴涵真度概念。为了讨论基于真度、条件真度和蕴涵真度的近似推理模式的关系,本文以真度概念为基础,在二值命题逻辑系统中引入蕴涵度量概念,并通过蕴涵度量的真度表示式,给出了与有限理论相关的分别基于真度、条件真度和蕴涵真度的伪距离的蕴涵度量表示式,证明了分别基于真度、条件真度和蕴涵真度的近似推理问题可以转化为基于蕴涵度量的近似推理讨论,并给出了蕴涵度量在近似推理中的应用,为二值命题逻辑系统的基于不同真度的近似推理研究提供数值化方法。

1 公式的蕴涵度量

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 n 个互异的命题变元,$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$,$F(S)$ 表示 S 上的命题公式全体。

定义 1[3-4] 设 $A\in F(s)$,$\bar{A}:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ 是 A 诱导的 Boole 函数。称 $\tau(A)=\frac{1}{2^n}\left|\bar{A}^{-1}(1)\right|$ 为 A 的真度。

由于 $\bar{A}^{-1}(1)$ 为公式 A 的成真赋值集,本文将 $\bar{A}^{-1}(1)$ 记为 $T(A)$,显然有 $T(A\wedge B)=T(A)\cap T(B)$,$T(A\vee B)=T(A)\cup T(B)$。关于公式在基本逻辑运算下的真度关系有下列结果。

引理 1[3-4] 设 $A,B\in F(S)$,则有下列基本真度等式:1)$\tau(\neg A)=1-\tau(A)$;2)$\tau(A\vee B)=\tau(A)+\tau(B)-\tau(A\wedge B)$;3)$\tau(A\to B)=\tau(A\wedge B)-\tau(A)+1$。

引理 2 设 $A,B,C\in F(S)$,则 $\tau(A\to B)+\tau(B\to C)\leqslant 1+\tau(A\to C)$。

证明 由引理 1 的结论 3),得 $\tau(A\to B)+\tau(B\to C)=2+\tau(A\wedge B)+\tau(B\wedge C)-\tau(A)-\tau(B)$。由 $\tau(A\wedge B)=\tau(A\wedge B\wedge C)+\tau(A\wedge B\wedge\neg C)$,$\tau(B)=\tau(B\wedge C)+\tau(B\wedge\neg C)$,故

$$\tau(A\to B)+\tau(B\to C)=1+[1+\tau(A\wedge B\wedge C)-\tau(A)]+[\tau(A\wedge B\wedge\neg C)-\tau(B\wedge\neg C)]$$

而 $1+\tau(A\wedge B\wedge C)-\tau(A)\leqslant 1+\tau(A\wedge C)-\tau(A)=\tau(A\to C)$,$\tau(A\wedge B\wedge\neg C)-\tau(B\wedge\neg C)\leqslant 0$,

* 收稿日期:2008-10-21 修回日期:2009-03-24
作者简介:王廷明,男,教授,研究方向为经典逻辑。

故 $\tau(A\to B)+\tau(B\to C)\leqslant 1+\tau(A\to C)$,即结论成立。 证毕

定义2 设 $A,B\in F(S)$,称 $d(A,B)=1-\tau(A\to B)$ 为公式 A 到 B 的蕴涵度量。

定理1 设 $A,B,C\in F(S)$,则 $d(A,B)+d(B,C)\geqslant d(A,C)$。

证明 由引理2得

$$d(A,B)+d(B,C)=2-[\tau(A\to B)+\tau(B\to C)]\geqslant 1-\tau(A\to C)=d(A,C)$$ 证毕

一般地 $d(A,B)\neq d(B,A)$,即蕴涵度量是 $F(S)$ 上的非对称逻辑度量。由真度运算得 $d(A,B)=\tau(A)-\tau(A\wedge B)$,$d(A,A)=0$ 以及 $\rho(A,B)=d(A,B)+d(B,A)$,且 A,B 逻辑等价当且仅当 $d(A,B)=0$。进一步由真度计算可得下列结果。

定理2 设 $A,B,C\in F(S)$,则1) $d(A,B\vee C)=d(A,B)+d(A,C)-d(A,B\wedge C)$;2) $d(A\vee B,C)=d(A,C)+d(B,C)-d(A\wedge B,C)$;3) $d(A,B)+d(A,\neg B)=\tau(A)$;4) $d(A,B)+d(\neg A,B)=1-\tau(B)$。

设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 为 $F(S)$ 中的有限理论,记 $D(\Gamma)$ 为 Γ-结论集,$C_\Gamma=A_1\wedge\cdots\wedge A_m$。下面给出相关蕴涵度量的真度表示式。

定义3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$A\in F(S)$。称 $d(D(\Gamma),A)=\inf\{d(B,A)\mid B\in D(\Gamma)\}$ 为 $D(\Gamma)$ 到公式 A 的蕴涵度量。

引理3[7,8] 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$A\in F(S)$,则

$$\sup\{\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}=1+\tau(C_\Gamma\wedge A)-\tau(C_\Gamma)$$

定理3 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$A\in F(S)$,则 $d(D(\Gamma),A)=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)$。

证明 由引理3得 $d(D(\Gamma),A)=\inf\{1-\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}=1-\sup\{\tau(B\to A)\mid B\in D(\Gamma)\}=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)$,故结论成立。 证毕

由定理3可知,公式 A 到 B 的蕴涵度量 $d(A,B)=d(D(\{A\}),B)$。进一步,通过真度计算并注意到 $d(D(\Gamma),\bar{0})=\tau(C_\Gamma)$,$d(D(\Gamma),\bar{1})=0$ 可得下列结果。

定理4 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}\subset F(S)$,$A,B\in F(S)$,则1) $d(D(\Gamma),A\vee B)=d(D(\Gamma),A)+d(D(\Gamma),B)-d(D(\Gamma),A\vee B)$;2) $d(D(\Gamma),\neg A)=\tau(C_\Gamma)-d(D(\Gamma),A)$;3) $d(D(\Gamma),A\to B)=d(D(\Gamma),A\wedge B)-d(D(\Gamma),A)$。

文献[5,6]在二值命题逻辑系统中利用真度分别引入了公式的条件真度和蕴涵真度概念。

定义4[5] 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 为 $F(S)$ 中的有限理论,$A\in F(S)$,令 $\tau(C_\Gamma)>0$。称 $\tau(A\mid\Gamma)=\dfrac{\tau(C_\Gamma\wedge A)}{\tau(C_\Gamma)}$ 为公式 A 在信息 Γ 下的条件真度。

定义5[6] 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$ 是 $F(S)$ 中的有限理论,$A\in F(S)$。称 $\tau_\Gamma(A)=\tau(C_\Gamma\to A)$ 为公式 A 的 Γ 蕴涵真度。

进一步,文献[5]基于条件真度给出了 $F(S)$ 中的一种伪距离 $\rho_\Gamma(A,B)=1-\tau((A\to B)\wedge(B\to A)\mid\Gamma)$,这里 Γ 为 $F(S)$ 中的有限理论且 $\tau(C_\Gamma)>0$。文献[6]基于蕴涵真度给出了 $F(S)$ 的另一种伪距离 $\rho(\Gamma;A,B)=1-\tau_\Gamma((A\to B)\wedge(B\to A))$,并且计算真度可得

$$\rho_\Gamma(A,B)=\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\rho(C_\Gamma\wedge A,C_\Gamma\wedge B),\rho(\Gamma;A,B)=\rho(C_\Gamma\wedge A,C_\Gamma\wedge B)$$

因此令 $\rho(A,D(\Sigma))=\inf\{\rho(A,B)\mid B\in D(\Sigma)\}$,$\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))=\inf\{\rho_\Gamma(A,B)\mid B\in D(\Sigma)\}$ 以及 $\rho(\Gamma;A,D(\Sigma))=\inf\{\rho(\Gamma;A,B\mid B\in D(\Sigma)\}$,则 A 到 $D(\Sigma)$ 的上述3种伪距离可用蕴涵度量表示如下。

定理5 设 $\Gamma=\{A_1,\cdots,A_m\}$,$\Sigma=\{B_1,\cdots,B_s\}\subset F(S)$,$A\in F(S)$,则1) $\rho(A,D(\Gamma))=d(D(\Gamma),A)$;2) $\rho(\Gamma;A,D(\Sigma))=d(D(\Gamma\cup\Sigma),A)$;3) 当 $\tau(C_\Gamma)>0$ 时,$\rho_\Gamma(A,D(\Sigma))=\dfrac{1}{\tau(C_\Gamma)}d(D(\Gamma\cup\Sigma),A)$。

证明 由文献[7]及定理3得 $\rho(A,D(\Gamma))=\tau(C_\Gamma)-\tau(C_\Gamma\wedge A)=d(D(\Gamma),A)$,故结论1)成立。又由

$$\rho(\Gamma;A,D(\Sigma))=\inf\{\rho(C_\Gamma\wedge A,C_\Gamma\wedge B)\mid B\in D(\Sigma)\}=$$
$$\inf\{\rho(C_\Gamma\wedge A,B)\mid B\in D(\Gamma\cup\Sigma)\}=\rho(C_\Gamma\wedge A,D(\Gamma\cup\Sigma))$$

由定理3以及 $C_{\Gamma\cup\Sigma}=C_\Gamma\wedge C_\Sigma$ 知

$$\rho(C_\Gamma \wedge A, D(\Gamma \cup \Sigma)) = \tau(C_{\Gamma\cup\Sigma}) - \tau(C_{\Gamma\cup\Sigma} \wedge C_\Gamma \wedge A) =$$
$$\tau(C_{\Gamma\cup\Sigma}) - \tau(C_{\Gamma\cup\Sigma} \wedge A) = \rho(A, D(\Gamma \cup \Sigma))$$

故由结论 1）得结论 2）成立。同理

$$\rho_\Gamma(A, D(\Sigma)) = \inf\left\{\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\rho(C_\Gamma \wedge A, C_\Gamma \wedge B) \mid B \in D(\Sigma)\right\} =$$

$$\frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\inf\{\rho(C_\Gamma \wedge A, B) \mid B \in D(\Gamma \cup \Sigma)\} = \frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\rho(C_\Gamma \wedge A, D(\Gamma \cup \Sigma)) = \frac{1}{\tau(C_\Gamma)}\rho(A, D(\Gamma \cup \Sigma))$$

故由结论 1）得结论 3）成立。 证毕

2 蕴涵度量在近似推理中的应用

定义 6[3-4] 设 $\Gamma \subset F(S)$，$A \in F(S)$，$\varepsilon > 0$。若 $\rho(A, D(\Gamma)) \leqslant \varepsilon$，则称 A 为 Γ 的误差不大于 ε 的结论，记为 $A \in D_\varepsilon(\Gamma)$。

定义 7[5] 设 $\Gamma, \Sigma \subset F(S)$，$A \in F(S)$，$\varepsilon > 0$。若 $\rho_\Sigma(A, D(\Gamma)) \leqslant \varepsilon$，则称 A 为 Γ 的在信息 Σ 下的误差不大于 ε 的结论，记为 $A \in D_{\Sigma,\varepsilon}(\Gamma)$。

定义 8 设 $\Gamma \subset F(S)$，$A \in F(S)$，$\varepsilon > 0$。若 $d(D(\Gamma), A) \leqslant \varepsilon$，则称 A 为 Γ 的基于蕴涵度量的误差不大于 ε 的结论，记为 $A \in D_{d,\varepsilon}(\Gamma)$。

文献[6]基于蕴涵真度提出了 3 类近似推理模式 $D^1_{\Sigma,\varepsilon}(\Gamma)$，$D^2_{\Sigma,\varepsilon}(\Gamma)$ 和 $D^3_{\Sigma,\varepsilon}(\Gamma)$，并证明了它们的等价性。本文将上述三类近似推理模式统一记为 $D_\varepsilon(\Sigma;\Gamma)$，则由定理 5 可得下列结论。

定理 6 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\}$，$\Sigma = \{B_1, \cdots, B_s\} \subset F(S)$，$A \in F(S)$，$\varepsilon > 0$，则 1）$A \in D_\varepsilon(\Gamma)$ 当且仅当 $A \in D_{d,\varepsilon}(\Gamma)$；2）$A \in D_\varepsilon(\Sigma;\Gamma)$ 当且仅当 $A \in D_{d,\varepsilon}(\Gamma \cup \Sigma)$；3）当 $\tau(C_\Sigma) > 0$ 时，$A \in D_{\Gamma,\varepsilon}(\Sigma)$ 当且仅当 $A \in D_{d,\varepsilon\tau(C_\Sigma)}(\Gamma \cup \Sigma)$。

由定理 6 可知，上述分别基于真度、条件真度、蕴涵真度和蕴涵度量的 4 类近似推理模式可以相互转化。因此可将基于真度、条件真度和蕴涵真度的近似推理问题纳入基于蕴涵度量的近似推理研究中。

定理 7 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\} \subset F(S)$，$\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$，$A, B \in F(S)$ 且 $A \in D_{d,\varepsilon_1}(\Gamma)$，$B \in D_{d,\varepsilon_2}(\Gamma)$，令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，则 $A \vee B \in D_{d,\varepsilon}(\Gamma)$。

证明 由定理 3 知 $d(D(\Gamma), A \vee B) = \tau(C_\Gamma) - \tau(C_\Gamma \wedge (A \vee B)) = \tau(C_\Gamma) - \tau((C_\Gamma \wedge A) \vee (C_\Gamma \wedge B)) \leqslant \min\{d(D(\Gamma), A), d(D(\Gamma), B)\}$。由条件知 $d(D(\Gamma), A) \leqslant \varepsilon_1$，$d(D(\Gamma), B) \leqslant \varepsilon_2$，从而 $d(D(\Gamma), A \vee B) \leqslant \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = \varepsilon$，即结论成立。 证毕

定理 8 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\} \subset F(S)$，$\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$，$A, B \in F(S)$ 且 $A \in D_{d,\varepsilon_1}(\Gamma)$，$A \to B \in D_{d,\varepsilon_2}(\Gamma)$，则 $B \in D_{d,\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\Gamma)$。

证明 由定理 3 并计算真度可得

$$d(D(\Gamma), A \to B) = \tau(C_\Gamma) - \tau(C_\Gamma \wedge (A \to B)) = 1 - \tau((C_\Gamma \wedge A) \to B) =$$
$$d(D(\Gamma), B) - d(D(\Gamma), A) - [\tau(C_\Gamma \wedge A) - \tau(C_\Gamma \wedge (A \vee B))]$$

故由 $\tau(C_\Gamma \wedge A) - \tau(C_\Gamma \wedge (A \vee B)) \leqslant 0$ 以及 $d(D(\Gamma), A) \leqslant \varepsilon_1$，$d(D(\Gamma), A \to B) \leqslant \varepsilon_2$ 得

$$d(D(\Gamma), B) \leqslant d(D(\Gamma), A) + d(D(\Gamma), A \to B) \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

即 $B \in D_{d,\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\Gamma)$。

定理 9 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\} \subset F(S)$，$\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$，$A, B \in F(S)$ 且 $A \in D_{d,\varepsilon_1}(\Gamma)$，$d(A, B) \leqslant \varepsilon_2$，则 $B \in D_{d,\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\Gamma)$。

证明 由定理 3 得 $d(D(\Gamma), B) = d(D(\Gamma), A) + [\tau(C_\Gamma \wedge A) - \tau(C_\Gamma \wedge B)]$。而由引理 2 得

$$\tau(C_\Gamma \wedge A) - \tau(C_\Gamma \wedge B) = \tau(C_\Gamma \to A) - \tau(C_\Gamma \to B) \leqslant 1 - \tau(A \to B) = d(A, B)$$

故 $d(D(\Gamma), B) \leqslant d(D(\Gamma), A) + d(A, B)$，从而由条件得结论成立。 证毕

定理 10 设 $\Gamma = \{A_1, \cdots, A_m\}$，$\Sigma = \{B_1, \cdots, B_s\} \subset F(S)$，$\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$，$A \in F(S)$ 且 $d(C_\Sigma, C_\Gamma) \leqslant \varepsilon_1$，$A \in D_{d,\varepsilon_2}(\Gamma)$，则 $A \in D_{d,\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\Sigma)$。

证明 由定理3和引理2得

$$d(D(\Sigma),A)=1-\tau(C_\Sigma\to A)\text{ 以及 }\tau(C_\Sigma\to C_\Gamma)+\tau(C_\Gamma\to A)\leqslant 1+\tau(C_\Sigma\to A)$$

故 $$d(D(\Sigma),A)\leqslant[1-\tau(C_\Sigma\to C_\Gamma)]+[1-\tau(C_\Gamma\to A)]=d(C_\Sigma,C_\Gamma)+d(D(\Gamma),A)$$

从而由条件得结论成立。 证毕

参考文献:

[1] 王国俊,傅丽,宋建社. 二值命题逻辑中命题的真度理论[J]. 中国科学A辑,2001,31(11):998-1008.
[2] 王国俊,王伟. 逻辑度量空间[J]. 数学学报(中文版),2001,44(1):159-168.
[3] 王国俊. 计量逻辑学(I)[J]. 工程数学学报,2006,23(2):191-215.
[4] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京:科学出版社,2006.
[5] 韩邦和,王国俊. 二值逻辑中命题的条件真度理论[J]. 模糊系统与数学,2007,21(4):9-15.
[6] 刘保翠,王国俊. 二值命题逻辑中的三种 Γ 近似推理模式及其等价性[J]. 模糊系统与数学,2008,22(2):10-17.
[7] 王廷明,王爱青. 二值命题逻辑中伪距离的真度表示及其应用[J]. 青岛理工大学学报,2008,29(3):87-90.
[8] 王廷明. 二值命题逻辑中 Γ-的蕴涵距离和近似推理[J]. 德州学院学报,2008,24(6):5-7.

The Implication Measurement and Approximate Reasoning in Two-valued Propositional Logic

WANG Ting-ming

(College of Teachers, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China)

Abstract: Based on the truth degree of the formula, conditional truth degree and the implicative truth degree respectively, we gain the new numerical studying method of the severity of the systems and the approximate reasoning problems in the two-valued propositional logic. Furthermore, we also concentrate on the relationship among the truth degree, conditional truth degree and the implicative truth degree in approximate reasoning mode. According to the truth degree in this paper, we obtain the definition of the implication measurement in the two-valued propositional logic system. Using the truth degree expressions of the implication measurement, we show the implication measurement expressions of the pseudo metric which are resulted separately from the truth degree, conditional truth degree and implicative truth degree. These expressions are all relative to the finite theory. Hence we have achieved the transformation from the problems of approximate reasoning based on the three kinds of truth degrees as above to the approximate reasoning based on the implication measurement. Meanwhile, we have mastered the applications of approximate reasoning in implication measurement. So these studies could become the numerical identification of approximate reasoning which is based on the different kinds of truth degree in two-valued propositional logic.

Key words: two-valued propositional logic; truth degree; conditional truth degree; pseudo metric; implication measurement

(责任编辑 黄 颖)