运筹学与控制论

DOI :10. 3969/J. ISSN. 1672-6693. 2009. 04. 001

求解全局优化问题的一种新方法*

吴 至 友
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘要 :局部最优性必要条件是用来设计局部优化算法的一个主要工具。本文将介绍求解全局优化问题的一种新的方法 :利用全局最优性条件(最优性必要条件[NC]和最优性充分条件[SC])来研究一类 {0,1} 双值混合二次规划问题的一些最优化算法。首先利用其全局最优性必要条件[NC]来研究这类双值混合二次规划问题的局部最优化算法,然后针对于这类 {0,1} 双值混合二次规划问题,研究一类特殊的辅助函数 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 来克服现有的局部极小点,最后利用所得到的辅助函数 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 和局部优化算法 $\mathrm{LOM}_{\mathrm{MQP}}$ 以及全局最优性充分条件[SC]来得到具有一定终止准则的全局最优化算法(GOM)。

关键词 :全局最优化问题 ;全局最优性条件 ;全局最优化算法
中图分类号 :O221. 2　　文献标识码 :A　　文章编号 :1672-6693(2009)04-0001-08

非凸规划问题往往具有多个局部最优解,而传统的优化方法,如可行下降方法、序列二次规划方法、乘子罚函数方法等等,通常在得到的第一个局部最优解处便终止,因而对于具有多个局部最优解的非凸规划来说,仅利用传统的方法往往得不到其全局最优解。而寻找最佳的效益,最低的成本以及最好的管理方法等等是最终的目的,那么如何从这多个局部最优解中寻找到最好的解,这就是全局优化问题。此类问题广泛见于工程、经济、金融、管理、网络运输、集成电路设计与数据处理、化学工程设计与处理、分子生物学等各个领域,所以研究全局优化问题是非常重要也是非常必要的。近年来人们已经提出了不少求解全局优化问题的一些数值算法[1-15],同时对一些特殊的全局优化问题的理论研究也取得了一定的进展[16-29]。但现有的很多全局优化算法的最主要的缺陷是缺乏终止准则,也就是说无法判定所得到的解是否是全局最优解,而缺乏终止准则的原因是因为缺乏可验证的全局最优性条件。

局部最优性必要条件是用来设计局部优化算法的一个主要工具,而局部最优性充分条件是设计局部最优化算法终止准则的一个很重要的理论根据。这种很自然的方法在现有的全局优化算法的设计中还没有用到。近年来,已有很多学者从事于全局优化的最优性条件的研究,对一些很特殊的全局优化问题也得到了一些比较好的结果[16-17,22-24,26]。近两年来,作者本人也已经在全局优化最优性条件的研究方面寻求到了一种新的研究途径 :利用非凸函数的抽象次梯度和集合的抽象正则锥的性质来对一些特殊的非凸二次规划问题的全局最优性条件进行了研究,并得到了一些初步的研究成果[18-19,27,29-31]。本文将介绍如何利用文献[30]中所得到的关于双值混合二次规划问题的全局最优性条件来设计出一些计算效果较好的具有一定终止准则的全局最优化算法。

本文结构安排如下 :第一节介绍双值混合二次规划问题的一些全局最优性条件 ;第二节介绍如何利用全局最优性必要条件来设计出一些局部优化算法 ;第三节介绍一种特殊的辅助函数,并利用所给出的辅助函数,局部优化算法和全局最优性充分条设计出具有一定终止准则的全局最优化算法。

1 双值混合二次规划问题的全局最优性条件

考虑如下的一类双值混合二次规划问题

$$(\mathrm{MQP})\quad \min \quad \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_0x+x^{\mathrm{T}}a_0$$

* 收稿日期 :2009-08-10
资助项目 :重庆市自然科学基金(No. 2007BB9233)
作者简介 :吴至友,女,教授,博士,研究方向为最优化理论与方法。

$$\text{s.t.}\quad x\in U=\left\{(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\;\middle|\;\begin{array}{l}x_i\in\{-1,1\},i\in I\\ x_i\in[-1,1],i\in J\end{array}\right\}$$

这里 $a_0=(a_1^0,\cdots,a_n^0)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$,$A_0=(a_{ij}^0)_{n\times n}\in S^n$,$S^n$ 是所有的 $n\times n$ 对称矩所成的集合,$I,J\subset\{1,\cdots,n\}$,$I\cap J=\varnothing$,$I\cup J=\{1,\cdots,n\}$。这类双值混合二次规划问题是一类很难的问题,即使对 $J=\varnothing$ 这种特殊情形,问题(MQP)仍然是一个NP-难的问题。文献[22]研究了问题(MQP)的一些全局最优性充分条件和必要条件。对一给定的点 $\bar{x}\in U$,令

$$\tilde{\bar{x}}_i:=\begin{cases}-1,若\ \bar{x}_i=-1\\ 1,若\ \bar{x}_i=1\\ a_i^0+(A_0\bar{x})_i,若\ \bar{x}_i\in(-1,1)\end{cases}$$

$$\tilde{\bar{X}}:=\mathrm{diag}(\tilde{\bar{x}}_1,\cdots,\tilde{\bar{x}}_n)$$

对 $Q=\mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_n)$,$q_i\in\mathbf{R}$,$i\in I\cup J$,令

$$q_i^-:=\begin{cases}q_i,若\ i\in I\\ \min\{0,q_i\},若\ i\in J\end{cases}$$

$$Q^-:=\mathrm{diag}(q_1^-,\cdots,q_n^-)$$

定理1[22] ((MQP)的全局最优性充分条件)令 $\bar{x}\in U$。如果下面的全局最优性条件[SC]成立

$$[\mathrm{SC}]\quad\begin{cases}\mathrm{diag}(\tilde{\bar{X}}(a_0+A_0\bar{x}))\le A_0\\ \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0+(A_0\bar{x})_i)\leqslant 0,\forall i\in J\end{cases}$$

则 $\bar{x}$ 是问题(MQP)的一个全局极小点。

定理2[22] ((MQP)的全局最优性必要条件)令 $\bar{x}\in U$,$\bar{X}:=\mathrm{diag}(\bar{x})$。如果 $\bar{x}$ 是(MQP)的一个全局极小点,则如下的条件[NC]成立

$$[\mathrm{NC}]\quad\begin{cases}[\mathrm{NC}]_1\ \bar{x}_i(a_i^0+(A_0\bar{x})_i)\leqslant a_{ii}^0,\forall i\in I\\ [\mathrm{NC}]_2\ \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0+(A_0\bar{x})_i)\leqslant\min\{0,a_{ii}^0\},\forall i\in J\end{cases}$$

下面将利用这些全局最优性充分和必要条件来研究这类双值混合二次规划问题(MQP)的一些最优化算法。

2 (MQP)的局部最优化算法

这里将介绍如何利用问题(MQO)的全局最优性必要条件来设计其局部最优化算法。首先对如下的一般的双值混合规划问题(MP)

$$(\mathrm{MP})\quad\min\ f(x)$$
$$\text{s.t.}\quad x\in U$$

这里 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是一个一般的在 $\bar{U}=\prod_{i=1}^n[-1,1]$ 上连续可微的函数,给出如下的几个记号和定义。令 e_i 为第 i 个分量为1,其余分量为0的单位向量,对任意的 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm T}\in U$,令

$$K_{\bar{x}}:=\{i\mid\bar{x}_i\in\{-1,1\},i=1,\cdots,n\}$$

$$N_i(\bar{x}):=\{\bar{x}-2\bar{x}_ie_i\},\forall i\in K_{\bar{x}}$$

$$\delta(\bar{x}):=\begin{cases}\min\{\bar{x}_i+1,1-\bar{x}_i,\forall i\in J\backslash K_{\bar{x}}\},若\ J\backslash K_{\bar{x}}\neq\varnothing\\ 1,否则\end{cases}$$

对 $0<\delta\leqslant\delta(\bar{x})$,令

$$N_{i,\delta}(\bar{x}):=\left\{\bar{x}+\alpha e_i\;\middle|\;\begin{array}{l}\alpha\in(0,\delta),若\ \bar{x}_i=-1\\ \alpha\in(-\delta,0),若\ \bar{x}_i=1\\ \alpha\in(-\delta,\delta),若\ \bar{x}_i\in(-1,1)\end{array}\right\},\forall i\in J$$

$$N_\delta(\bar{x}) := \bigcup_{i \in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x}) \bigcup_{i \in J} N_{i,\delta}(\bar{x})$$

显然,$N_\delta(\bar{x}) \subseteq U$ 而且 $|N_i(\bar{x})| = 1$,这里 $|N_i(\bar{x})|$ 是指集合 $N_i(\bar{x})$ 的元素个数。

定义 1 令 $\bar{x} \in U$,$\delta \leqslant \delta(\bar{x})$,$N_\delta(\bar{x})$ 称为点 $\bar{x}$ 的一个邻域。

定义 2 令 $\bar{x} \in U$,如果存在 $0 < \delta \leqslant \delta(\bar{x})$ 使得 $f(\bar{x}) \leqslant f(x)$,$\forall x \in N_\delta(\bar{x})$,则 $\bar{x}$ 称为(MP)的一个局部极小点 如果 $f(\bar{x}) < f(x)$,$\forall x \in N_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$,则 $\bar{x}$ 是(MP)的一个严格局部极小点。

如果存在 $0 < \delta \leqslant \delta(\bar{x})$ 使得 $f(\bar{x}) \geqslant f(x)$,$\forall x \in N_\delta(\bar{x})$,则 $\bar{x}$ 称为 $f(x)$ 在 U 上的一个局部极大点 如果 $f(\bar{x}) > f(x)$,$\forall x \in N_\delta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$,则 $\bar{x}$ 称为 $f(x)$ 在 U 上的一个严格局部极大点。

定理 3 令 $\bar{x} \in U$,则 $\bar{x}$ 是(MQP)的一个局部极小点的充要条件是全局最优性必要条件[NC]成立。

证明 如果 $\bar{x}$ 是(MQP)的一个局部最极小点,则 $f(\bar{x}) \leqslant \min\{f(x) \mid x \in \cup_{i \in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x})\}$,而且很容易得到如下的结论

$$f(\bar{x}) \leqslant \min\{f(x) \mid x \in \cup_{i \in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x})\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 a_{ii}^0 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i = \bar{x}_i - 2\bar{x}_i = -\bar{x}_i, i \in K_{\bar{x}} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant a_{ii}^0, \forall i \in K_{\bar{x}} \tag{1}$$

而且如果 $\bar{x}$ 是(MQP)的局部极小点,则存在 $0 < \delta \leqslant \delta(\bar{x})$ 使得

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^{\mathrm{T}} A_0 (x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^{\mathrm{T}}(a_0 + A_0\bar{x}) \geqslant 0, \forall x \in \bigcup_{i \in J} N_{i,\delta}(\bar{x}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 a_{ii}^0 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x \in N_{i,\delta}(\bar{x}), i \in J \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_o + A_0\bar{x})_i = 0, a_{ii}^0 \geqslant 0, \forall i \in J \setminus K_{\bar{x}} \\ \tilde{\bar{x}}_i(a^0 + (A_0\bar{x}))_i \leqslant 0, \forall i \in J \end{cases} \tag{2}$$

由(1)和(2)式,可得出[NC]成立。

下面将证明,如果[NC]成立,则 $\bar{x}$ 是(MQP)的局部极小点。首先很容易验证

$$\bar{x}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant a_{ii}^0, \forall i \in I \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in \{-1,1\}, i \in I \tag{3}$$

事实上,有如下的结论成立

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in \{-1,1\}, i \in I \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant -\bar{x}_i \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i), \forall x_i \in \{-1,1\}, x_i \neq \bar{x}_i, i \in I \Leftrightarrow$$

$$\bar{x}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant a_{ii}^0, \forall i \in I (\text{因为 } x_i \neq \bar{x}_i \text{ 等价于 } x_i = -\bar{x}_i)$$

同样可以证明

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\}, \forall i \in J \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1], i \in J \tag{4}$$

事实上,显然如下的结论成立

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1], i \in J \Rightarrow \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\}, \forall i \in J$$

反之,对任意的 $i \in J$,如果 $\bar{x}_i = -1$,则

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1] \Leftrightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) + (a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1] \tag{5}$$

如果 $a_{ii}^0 \geqslant 0$ 且 $\bar{x}_i = -1$,则 $x_i - \bar{x}_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$ 且

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\} \Rightarrow \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) \geqslant 0 \geqslant \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i), \forall x_i \in [-1,1] \Rightarrow \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) + (a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$$

如果 $a_{ii}^0 < 0$ 且 $\bar{x}_i = -1$,则 $0 \leqslant \frac{x_i - \bar{x}_i}{2} \leqslant 1, \forall x_i \in [-1,1]$ 且

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\} \Rightarrow \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant a_{ii}^0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) \geqslant a_{ii}^0 \geqslant \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i), \forall x_i \in [-1,1] \Rightarrow \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) + (a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$$

所以,如果 $\bar{x}_i = -1$,则

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\} \Rightarrow \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) + (a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$$

同理可以证明 如果 $\bar{x}_i = 1$,则

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\} \Rightarrow \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i) + (a_0 + A_0\bar{x})_i \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$$

如果 $\bar{x}_i \in (-1,1)$,则

$$\tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\} \Leftrightarrow a_i^0 + (A_0\bar{x})_i = 0 \text{ 且 } a_{ii}^0 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (x_i - \bar{x}_i)(a_0 + A_0\bar{x})_i = \frac{a_{ii}^0}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 \geqslant 0, \forall x_i \in [-1,1]$$

从以上证明及(5)式可知,(4)式成立。

由 $N_{i,\delta}(\bar{x}) \subset \{x = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in U \mid x_i \in [-1,1]; x_j = \bar{x}_j, \forall j \neq i\}, \forall i \in J, N_i(\bar{x}) \subset \{x = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in U \mid x_i \in \{-1,1\}; x_j = \bar{x}_j, \forall j \neq i\}, \forall i \in I$,以及(3)和(4)式可知,如果条件[NC]成立,则 $\bar{x}$ 是(MQP)的局部极小点。所以 $\bar{x}$ 是(MQP)的局部最优解的充要条件是[NC]成立。 证毕

这里根据问题(MQP)的全局最优性必要条件给出了问题(MQP)的邻域和局部极小点的概念。下面将给出问题(MQP)的一个局部极小化算法。

算法1 ((MQP)的局部优化算法)($\mathrm{LOM_{MQP}}$)

step 1 任取一个初始点 $x_0 \in U$,令 $\bar{x} := x_0, k := 0$。

step 2 验证最优性必要条件$[\mathrm{NC}]_1$是否成立

$$[\mathrm{NC}]_1 \quad \bar{x}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant a_{ii}^0, \forall i \in I$$

如果$[\mathrm{NC}]_1$不成立,则转 step 3 如果$[\mathrm{NC}]_1$成立,则验证如下的最优性条件是否成立

$$[\mathrm{NC}]_2 \quad \tilde{\bar{x}}_i(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant \min\{0, a_{ii}^0\}, \forall i \in J$$

如果$[\mathrm{NC}]_2$成立,则转 step 5,否则转 step 4。

step 3 令 $x^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}} := \mathrm{argmin}\{f(x) \mid x \in \cup_{i \in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x})\}, \bar{x} := \bar{x}^*$,转 step 2。

step 4 对 $y_i \in [-1,1], i \in J$,令 $z_y := (z_1,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$,这里 $z_i = \begin{cases} \bar{x}_i, i \in I \\ y_i, y \in J \end{cases}$。令 $h(y) := f(z)$。用连续规划问题的局部极小化方法,求函数 $h(y)$ 在 $U_J = \prod_{i \in J}[-1,1]$ 上的局部极小点。令 y^* 是 $h(y)$ 在 U_J 上的局部极小点。令

$$\bar{z} := (\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)^{\mathrm{T}}, \bar{z}_i = \begin{cases} \bar{x}_i, i \in I \\ y_i^*, i \in J \end{cases}, \bar{x} := \bar{z}$$

转 step 4。

step 5 停止,$\bar{x}$ 是(MQP)的一个局部极小点。

3 (MQP)的全局最优化算法

上一节介绍了利用问题(MQP)的全局最优性必要条件设计的一种局部优化算法,利用这种局部优化算法能得到满足(MQP)的全局最优性必要条件的点,但这样的点不一定是(MQP)的全局最优解。这一节将引进一种辅助函数,来跳出现有的局部极小点,从而得到更好的解,并设计出一种具有一定终止准则的全局最优化算法。

对任意的 $r>0$,令

$$g_r(t)=\begin{cases}1,\text{若 } t>0\\ -\dfrac{2}{r^3}t^3-\dfrac{3}{r^2}t^2+1,\text{若 } -r<t\leqslant 0\\ 0,\text{若 } t\leqslant -r\end{cases}$$

$$h_r(t)=\min\{t,0\}$$

令
$$F_{r,\bar{x}}(x)=\frac{1}{1+\|x-\bar{x}\|^2}g_r(f(x)-f(\bar{x}))+h_r(f(x)-f(\bar{x}))$$

这里 $r>0$ 是参数,$\bar{x}$ 是问题(MQP)的当前的局部极小点。优化问题

$$(\mathrm{AP})\quad \min\ F_{r,\bar{x}}(x)\quad \text{s.t. } x\in U$$

具有如下的性质。

定理 4　令 $\bar{x}$ 是(MQP)的一个局部极小点,则对任意的 $r>0$,$\bar{x}$ 是 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 在 U 上的严格局部极大点。

证明　因为 $\bar{x}$ 是(MQP)的一个局部极小点,则存在 $\delta>0$ 使得 $N_\delta(\bar{x})\subset U$ 且 $f(x)\geqslant f(\bar{x})$,$\forall x\in N_\delta(\bar{x})$。所以,$F_{r,\bar{x}}(x)=\dfrac{1}{1+\|x-\bar{x}\|^2}<1=F_{r,\bar{x}}(\bar{x})$,$\forall x\in N_\delta(\bar{x})\setminus\{\bar{x}\}$。所以,$\bar{x}$ 是 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 在 U 上的严格局部极大点。　证毕

令 x^* 是(MQP)的全局极小点,$\beta=f(\bar{x})-f(x^*)$。

定理 5　如果 $\bar{x}$ 不是(MQP)的全局极小点,即 $\beta>0$,则当 $0<r\leqslant\beta$ 时,x^* 是(AP)的局部极小点。

证明　当 $r\leqslant\beta$ 时,有 $f(x^*)-f(\bar{x})\leqslant -r$,从而 $F_{r,\bar{x}}(x^*)=f(x^*)-f(\bar{x})\leqslant -r$。

下面将证明 $F_{r,\bar{x}}(x)\geqslant F_{r,\bar{x}}(x^*)$,$\forall x\in U$。

1) 如果 $f(x)-f(\bar{x})\geqslant -r$,则 $F_{r,\bar{x}}(x)\geqslant -r\geqslant F_{r,\bar{x}}(x^*)$。

2) 如果 $f(x)-f(\bar{x})<-r$,则 $F_{r,\bar{x}}(x)=f(x)-f(\bar{x})\geqslant f(x^*)-f(\bar{x})=F_{r,\bar{x}}(x^*)$。

所以,x^* 是(AP)的全局极小点,当然也是(AP)的局部极小点。　证毕

定理 6　设 $\hat{x}$ 是(AP)的局部极小点,则如下条件之一成立

1) $f(\hat{x})<f(\bar{x})$;

2) $\hat{x}:=(\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_n)$,这里 $\hat{x}_i=\begin{cases}-\bar{x}_i,i\in K_{\bar{x}}\\ -1\text{ 或者 }1,i\in J\setminus K_{\bar{x}}\end{cases}$。

证明　因为 $\hat{x}$ 是(AP)的一局部极小点,则存在 $\delta>0$,使得 $F_{r,\bar{x}}(\hat{x})\leqslant F_{r,\bar{x}}(x)$,$\forall x\in N_\delta(\hat{x})$。如果 $f(\hat{x})\geqslant f(\bar{x})$,而且存在 $i_0\in\{1,\cdots,n\}$ 使得

$$\begin{cases}\hat{x}_{i_0}\neq -\bar{x}_{i_0},\text{如果 } i_0\in K_{\bar{x}}\\ \hat{x}_{i_0}\in(-1,1),\text{如果 } i_0\in J\setminus K_{\bar{x}}\end{cases}$$

则有

1) 如果 $i_0\in K_{\bar{x}}$,而且因为 $\hat{x}_{i_0}\neq -\bar{x}_{i_0}$,则有 $\hat{x}_{i_0}=\begin{cases}\bar{x}_{i_0},i_0\in K_{\hat{x}}\\ (-1,1),i_0\in J\setminus K_{\hat{x}}\end{cases}$。

如果 $i_0\in K_{\hat{x}}$,令 $x_{i_0}=-\hat{x}_{i_0}=-\bar{x}_{i_0}$,则有 $x_{i_0}\in N_{i_0}(\hat{x})\subset N_\delta(\hat{x})$ 且

$$F_{r,\bar{x}}(x) \leqslant \frac{1}{1+\|x-\bar{x}\|^2} = \frac{1}{5} < 1 = F_{r,\bar{x}}(\hat{x})$$

这与 $\hat{x}$ 是 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 的局部极小点矛盾。

2) 如果 $\hat{x}_{i_0} \in (-1,1)$,令 $x_{i_0} := \hat{x}_{i_0} + \frac{\delta}{2}$,$y_{i_0} := \hat{x}_{i_0} + \frac{\delta}{2}$,并令

$$x = (\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_{i_0-1},x_{i_0},\hat{x}_{i_0+1},\cdots,\hat{x}_n)^{\mathrm{T}}$$
$$y = (\hat{x}_1,\cdots,\hat{x}_{i_0-1},y_{i_0},\hat{x}_{i_0+1},\cdots,\hat{x}_n)^{\mathrm{T}}$$

则 $x,y \in N_\delta(\hat{x})$,且 $F_{r,\bar{x}}(x) \leqslant \frac{1}{1+\|x-\bar{x}\|^2} = \frac{1}{1+\sum_{i\neq i_0}\|\hat{x}_i-\bar{x}_i\|^2+\|\hat{x}_{i_0}-\bar{x}_{i_0}+\frac{\delta}{2}\|^2}$

$$F_{r,\bar{x}}(y) \leqslant \frac{1}{1+\|y-\bar{x}\|^2} = \frac{1}{1+\sum_{i\neq i_0}\|\hat{x}_i-\bar{x}_i\|^2+\|\hat{x}_{i_0}-\bar{x}_{i_0}-\frac{\delta}{2}\|^2}$$

因为 $\|\hat{x}_{i_0}-\bar{x}_{i_0}+\frac{\delta}{2}\|^2$ 和 $\|\hat{x}_{i_0}-\bar{x}_{i_0}-\frac{\delta}{2}\|^2$ 至少有一个是小于 $\|\hat{x}_{i_0}-\bar{x}_{i_0}\|^2$,所以 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 和 $F_{r,\bar{x}}(y)$ 至少有一个是小于 $F_{r,\bar{x}}(\hat{x})$,这与 $\hat{x}$ 是(AP)的局部极小点矛盾。

综上所述,如果 $\hat{x}$ 是(AP)的局部极小点,则条件 1) 和 2) 至少有一个成立。 证毕

利用所给出的辅助函数 $F_{r,\bar{x}}(x)$,可以给出问题(MQP)的一个全局最优化算法。在给出问题(MQP)的全局最优化算法之前,首先需要给出问题(AP)的一个局部最优化算法。

算法 2 ((MP)的局部最优化算法)($\mathrm{LOM_{AP}}$)

step 1 任取一个初始点 $x_0 \in U$,令 $\bar{x} := x_0$,$k := 0$。

step 2 对 $y_i \in \mathbf{R}$,$i \in J$,令 $z_y := (z_1,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$,这里 $z_i = \begin{cases}\bar{x}_i, i \in I\\ y_i, i \in J\end{cases}$,$g(y) := F_{r,\bar{x}}(z)$。用连续规划问题的局部极小化方法,求函数 $g(y)$ 在 $U_J = \prod_{i\in J}[-1,1]$ 上的局部极小点。令 y^* 是 $g(y)$ 在 U_J 上的局部极小点,令 $\bar{z} := (\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n)^{\mathrm{T}}$,$\bar{z}_i = \begin{cases}\bar{x}_i, i \in I\\ y_i^*, i \in J\end{cases}$,$\bar{x} := \bar{z}$。

step 3 检验如下条件是否成立

$$[\mathrm{LC}]_1 \quad f(\bar{x}) \leqslant \min\{f(x) \mid x \in \cup_{i\in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x})\}$$

如果$[\mathrm{LC}]_1$不成立,则转 step 4 如果$[\mathrm{LC}]_1$成立,则转 step 5。

step 4 令 $x^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}} := \operatorname{argmin}\{f(x) \mid x \in \cup_{i\in K_{\bar{x}}} N_i(\bar{x})\}$,$\bar{x} := x^*$,转 step 2。

step 5 停止,$\bar{x}$ 是(AP)的一个局部极小点。

注 容易验证如下的结论:由 step 2 所得到的 $\bar{x}$,如果满足条件$[\mathrm{NC}]_1$,则 $\bar{x}$ 一定是(AP)的一个局部极小点。事实上,因为 y^* 是 $g(y)$ 在 U_J 上的局部极小点,则存在 $\delta > 0$,使得 $g(y) \geqslant g(y^*)$,$\forall y \in O_\delta(y^*)$,这里 $O_\delta(y^*) = \{y \in \mathbf{R}^{|J|} \mid \|y-y^*\| \leqslant \delta\}$,$|J|$ 表示集合 J 的元素个数(这里不妨假设 $|J| > 0$,而且 $I = \{1,\cdots,|I|\}$)。则容易验证 $\cup_{i\in J}N_{i,\delta}(\bar{x}) \subset \{(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{|I|},y_1,\cdots,y_{|J|})^{\mathrm{T}} \mid y \in O_\delta(y^*)\}$,所以,有 $F_{r,\bar{x}}(x) \geqslant F_{r,\bar{x}}(\bar{x})$,$\forall x \in \cup_{i\in J}N_{i,\delta}(\bar{x})$。所以,如果$[\mathrm{NC}]_1$成立,则 $\bar{x}$ 是(AP)的一个局部极小点。

利用本文所给出的关于问题(MQP)和问题(AP)的局部最优化算法,辅助函数 $F_{r,\bar{x}}(x)$ 以及问题(MQP)的全局最优性充分条件,可以得到问题(MQP)的如下的全局最优化算法。

算法 3 ((MQP)的全局最优化算法)(GOM)

step 0 任取一初始点 $x_1 \in U$,一个充分小的正数 μ,一个初始的参数 $r_1 > 0$。令 $k := 1$,$r := r_1$。

step 1 从 x_k 出发,利用局部极小化算法($\mathrm{LOM_{MQP}}$)(算法 1)求得问题(MQP)的局部极小点 x_k^*,令 $\bar{x} := x_k^*$。

step 2 验证 $\bar{x}$ 是否满足问题(MQP)的全局最优化性充分条件

$$[\mathrm{SC}] \quad \begin{cases}\operatorname{diag}(\tilde{\bar{X}}(a_0 + A_0\bar{x})) \preceq A_0\\ \tilde{\bar{x}}_I(a_i^0 + (A_0\bar{x})_i) \leqslant 0, \forall i \in J\end{cases}$$

如果[SC] 成立,则转 step 6 如果[SC] 不成立,则转 step 3。

step 3 构造如下的辅助函数

$$F_{r,\bar{x}}(x) = \frac{1}{1 + \|x - \bar{x}\|^2} g_r(f(x) - f(\bar{x})) + f_r(f(x) - f(\bar{x}))$$

考虑如下的优化问题

$$\begin{aligned} (\mathrm{AP}) \quad & \min \quad F_{r,\bar{x}}(x) \\ & \mathrm{s.t.} \quad x \in U \end{aligned} \tag{6}$$

转 step 4。

step 4 从 $\bar{x}$ 出发,利用局部优化算法($\mathrm{LOM}_{\mathrm{AP}}$)(算法 2) 解优化问题(6)。令 $\bar{x}^*$ 是问题(6) 的一个局部极小点。如果 $f(\bar{x}^*) < f(\bar{x})$,令 $x_{k+1} := \bar{x}^*$,$k := k + 1$,转 step 1 如果 $f(\bar{x}^*) \geqslant f(\bar{x})$,转 step 5。

step 5 如果 $r \geqslant \mu$,减少 r,例如,令 $r := r/10$,转 step 3 ;$r < \mu$,转 step 6。

step 6 停止,$\bar{x}$ 是问题(MQP) 的一个全局极小点。

参考文献:

[1] Certin B, Barhen J, Burdick J. Terminal repeller unconstrained subenergy tunneling(TRUST) for fast global optimization[J]. Journal of Optimization and Applications, 1993,77:97-126.

[2] Ge R P. A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables[J]. Mathamatical Programming,1990,46:191-204.

[3] Gu Y H, Wu Z Y. A new filled function method for nonlinear integer programming problem[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,173(2):938-950.

[4] Levy A V, Montalvo A. The tunneling algorithm for the global minimization of functions[J]. SIAM Journal on Scientific Computing,1985,6:15-29

[5] Li D, Sun X L, Wang F L. Convergent Lagrangian and contour-cut method for nonlinear integer programming with a quadratic objective function[J]. SIAM Journal on Optimization,2006,17(2):372-400.

[6] Liu X. Finding global minimia with a computable filled function[J]. Journal of Global Optimization,2001,19:151-161.

[7] Liu Y, Teo K. A bridge method for global optimization[J]. Journal of the Australian Mathematical Society(Series B), 1999,41:41-57.

[8] Sun X L, Li J L. A branch-and-bound based method for solving monotone optimization problems[J]. Journal of Global Optimization,2006,35:367-385.

[9] Wu Z Y, Lee H W J, Bai F S, et al. A filled function methods for constrained global optimization[J]. Journal of Global Optimization,2007,39(4):495-507.

[10] Wu Z Y, Lee H W J, Zhang L S, et al. A novel filled function method and quasi-filled function method for global optimization[J]. Journal of Computational Optimization and Applications,2006,34(2):249-272.

[11] Wu Z Y, Zhang L S, Teo K L, et al. A new modified function method for global optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2005,125(1):181-203.

[12] Wu Z Y, Bai F S, Zhang L S. Convexification, concavification for some classes of global optimization problems[J]. Journal of Global Optimization,2005,31(1):45-60.

[13] Zhang L S, NG C K, Li D, et al. A new filled function method for global optimization[J]. Journal of Global Optimization,2004,28:17-43.

[14] Zhu W X. Globally concavized filled function method for the box constrained continuous global minimization problem[J]. Optimization Method and Software,2006,21(4): 653-666.

[15] Zhu W X. A class of filled functions for box constrained continuous global optimization[J]. Applied Mathematics and Computation,2005,169(1):129-145.

[16] Beck A, Teboulle M. Global optimality conditions for quadratic optimization problems with binary constraints[J]. SIAM Journal on Optimization,2000,11:179-188.

[17] Hiriart-Urruty J B. Global optimality conditions in maximizing a convex quadratic function under convex quadratic constraints[J]. Journal of Global Optimization,2001,21: 445-455.

[18] Jeyakumar V, Rubinov A M, Wu Z Y. Global optimality conditions for non-convex quadratic minimization problems with quadratic constraints[J]. Mathematical Programming (series A),2007,110:521-541.

[19] Jeyakumar V, Rubinov A M, Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for non-convex quadratic minimization problems with box constraints[J]. Journal of Global Optimization,2006,36(3):471-481.

[20] Li D, Wu Z Y, Lee H W J, et al. Hidden convex minimiza-

tion[J]. Journal of Global Optimization,2005,31(2):211-233.

[21] Pallaschke D,Rolewicz S. Foundations of mathematical optimization (convex analysis without linearity)[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1997.

[22] Peng J M,Yuan Y. Optimization conditions for the minimization of a quadratic with two quadratic constraints[J]. SIAM on Optimization,1997,7(3):579-594.

[23] Pinar M C. Sufficient global optimality conditions for bivalent quadratic optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2004,122(2):433-440.

[24] Rubinov A M. Abstract convexity and global optimization [M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2000.

[25] Rubinov A M,Wu Z Y. Optimality conditions in global optimization and their applications [J]. Mathematical Programmintg(B),2009,120:101-123.

[26] Tuy H. Convex analysis and global optimization[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1998.

[27] Wu Z Y. Sufficient global optimality conditions for weakly convex minimization problems[J]. Journal of Global Optimization,2007,39(3):427-440.

[28] Wu Z Y,Li D,Zhang L S,et al. Peeling off a nonconvex cover of an actual convex problem:hidden convexity[J]. SIAM on Optimization,2007,18(2):507-536.

[29] Wu Z Y,Jeyakumar V,Rubinov A M. Sufficient conditions for globally optimality of bivalent nonconvex quadratic programs[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2007,133:123-130.

[30] Wu Z Y,Bai F S. Global optimality conditions for mixed nonconvex quadratic programs[J]. Optimization,2009,58(1):39-47.

[31] **吴至友,白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法**[J]. **重庆师范大学学报(自然科学版)**,2006,23(11):1-5.

A New Method for Global Optimization Problems

WU Zhi-you

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: It is well known that necessary conditions are the main tools for the development of efficient numerical methods in local optimization. This paper introduces a new method for global optimization roblems: some optimization methods for a kind of {0,1} quadratic programming problems with mixed variables are studied by using the global optimality conditions(necessary global optimality condition [NC] and sufficient global optimality condition[SC]). Firstly a local optimization method $\mathrm{LOM}_{\mathrm{MQP}}$ is designed according to its necessary global optimality conditions. Then a special auxiliary function $F_{r,\bar{x}}(x)$ is designed to escape the current local minimizer. Finally a global optimization method (GOM) with some stopping criterion is presented by using the obtained auxiliary function $F_{r,\bar{x}}(x)$, the local optimization mehtod $\mathrm{LOM}_{\mathrm{MQP}}$ and the sufficient global optimality condition [SC].

Key words: global optimization problems; global optimality conditions; global optimization methods

(责任编辑 黄 颖)