DOI :10. 3969/J. ISSN. 1672-6693. 2009. 04. 013

二维 Laplace 方程 Neumann 问题直接边界积分方程的 Galerkin 解法*

张守贵
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘要 对任意形状区域的二维 Laplace 方程 $\Delta u(x)=0$ 的 Neumann 问题,用 Green 公式和基本解 $-\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$ 推导得出与之等价的直接边界积分方程,采用直接边界积分方程的 Galerkin 解法来解该第二类 Fredholm 积分方程,在进行边界离散化处理时采用常单元。为了提高数值计算的误差精度,在形成线性代数方程组的刚度矩阵元素时,对二重积分的内层积分采用精确积分表达式,外层积分使用 Gauss 数值积分,数值实验表明该方法的有效性和实用性。

关键词 直接边界积分方程 ;Galerkin 边界元法 ;Laplace 方程 ;Neumann 问题
中图分类号 :O241. 82 **文献标识码** :A **文章编号** :1672-6693(2009)04-0067-03

Laplace 方程作为一类重要的椭圆边值问题,有广泛的运用背景。对于 Neumann 问题的直接边界积分方程,文献[1-2]等就给出了求解这类问题的基本解法—配置点法 ;文献[3]给出了采用自然边界元法求解规则区域上积分方程计算的方法 ;文献[4]给出了用双层位势求解的间接边界元解法,并推导出了具体的数值计算公式。而对于任意区域 Laplace 方程的 Neumann 问题,用 Green 公式和基本解推导得出的直接边界积分方程是第二类 Fredholm 积分方程。对内边值问题,由于采用直接边界积分方程时,方程中的未知量和解的边界法向量导数,是由 Green 公式相联系的,不是随意给定的,因而这类积分方程总是可解的。二维外问题,解在无穷远处趋于常数,原问题的解就存在唯一,这时解的积分表达式要作修正且积分方程的解应满足约束条件[5-6]。

Galerkin 方法是基于变分原理基础上,把微分方程或积分方程转化为等价的变分方程,通过离散变分方程求解原方程数值解的数值计算方法。在边界元方法中,用 Galerkin 方法比用配点法更便于进行理论分析。近些年来,在边界元方法已有一些采用 Galerkin 方法求解 Laplace 方程的文献[2-4,7-8],在此用直接边界积分方程,通过 Galerkin 方法求解 Laplace 方程的 Neumann 问题。本文给出了具体的数值计算公式,在计算中第一重积分采用精确积分,第二重积分使用数值积分,确保了计算的高精度效果。数值算例表明了理论推导的正确性。

1 边界积分方程及其变分形式

假定 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一有界开区域,其边界 $\Gamma=\partial\Omega$,其有界闭区域 $\overline{\Omega}=\Omega+\Gamma$,同时定义无限区域 $\Omega'=\mathbf{R}^2\setminus\overline{\Omega}$。对于二维 Laplace 方程的 Neumann 边值问题

$$\begin{cases}\Delta u(x)=0, x\in\Omega\cup\Omega' \\ \left.\dfrac{\partial u(x)}{\partial n(x)}\right|_{\Gamma}=g(x), x\in\Gamma\end{cases} \tag{1}$$

由文献[1]知,用 Green 公式和基本解推得调和函数 $u(y)$ 可以表示为

$$u(y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left(\ln|x-y|\frac{\partial u(x)}{\partial n}-u(x)\frac{\partial\ln|x-y|}{\partial n}\right)\mathrm{d}s_x,\quad y\in\Omega \tag{2}$$

当 $y\in\Gamma$ 时,有

$$\alpha(y)u(y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left(\ln|x-y|\frac{\partial u(x)}{\partial n}-u(x)\frac{\partial\ln|x-y|}{\partial n}\right)\mathrm{d}s_x \tag{3}$$

其中 $\alpha(y)=\dfrac{\theta(y)}{2\pi}$,$\theta(y)$ 是过点 y 的 Γ 的两条切线间包含的夹角。

在(1)式中,在边界 Γ 上调和函数的法向导数

* 收稿日期 :2008-09-11
基金项目 :重庆师范大学青年基金资助项目(No. 08xlq05)
作者简介 :张守贵,男,讲师,硕士,研究方向为边界元方法。

$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = g(x)$ 是已知的,这是一个以 $u(x)\big|_{\Gamma}$ 为未知量的第二类 Fredholm 积分方程。

求解内问题的直接边界积分方程可改写为

$$-\alpha(y)u(y) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} u(x)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n}\mathrm{d}s_x = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\ln|x-y|\,g(x)\,\mathrm{d}s_x \tag{4}$$

在条件 $\int_{\Gamma} g(x)\,\mathrm{d}s_x = 0$ 的情况下,积分方程在相差一个常数的意义下有唯一解[3]。

2 变分方程的离散及重积分的处理

在积分方程(4)式两边同乘以检验函数 $v(y)$,然后在边界 Γ 上积分,便得到变分方程

$$-\int_{\Gamma}\alpha(y)u(y)v(y)\,\mathrm{d}s_y + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}v(y)\int_{\Gamma}u(x)\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}v(y)\int_{\Gamma}\ln|x-y|\,g(x)\,\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y \tag{5}$$

采用线性插值来逼近未知函数和已知边界函数

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i\varphi_i, i = 1,2,\cdots,N \tag{6}$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i, i = 1,2,\cdots,N \tag{7}$$

$$v(y) = \sum_{i=1}^{N} v_i\varphi_i, i = 1,2,\cdots,N \tag{8}$$

其中 φ_i 为基函数。

把(6)~(8)式代入变分方程(5)式,则得到

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}u_i = b_j, j = 1,2,\cdots,N \tag{9}$$

当 $i = j$ 时,

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_i}\varphi_i\int_{\Gamma_{j-1}+\Gamma_j}\varphi_i\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y - \int_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_i}\alpha(y)\varphi_i\mathrm{d}s_y$$

当 $i \neq j$ 时,

$$a_{ij} = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_i}\varphi_i\int_{\Gamma_{j-1}+\Gamma_j}\varphi_j\frac{\partial \ln|x-y|}{\partial n}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y;$$

$$b_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{j-1}+\Gamma_j}\varphi_j\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_{i-1}+\Gamma_i}\ln|x-y|\,g(x)\varphi_i\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y,\quad j = 1,2,\cdots,N$$

把上述线性方程组写成紧凑形式

$$AU = B \tag{10}$$

在求解系数矩阵的元素 a_{ij} 时,都用到二重积分。为了提高误差精度,可以对内层积分采用精确积分,外层积分采用数值积分。当采用常单元,在计算中所用到的精确积分公式有

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n_x}\ln\frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}s_x = \arctan\frac{s_2}{d} - \arctan\frac{s_1}{d}$$

$$\int_{\Gamma}\ln|x-y|\,\mathrm{d}s_x = s_2\ln r_2 - s_1\ln r_1 - l + d\left(\arctan\frac{s_2}{d} - \arctan\frac{s_1}{d}\right)$$

如图1所示,积分源点为 Q 点,积分单元是从 P_1 到 P_2 的有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$,沿有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的单位向量为 $\vec{m}$,$\vec{n}$ 是 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的单位外法向量,d 为源点 Q 到积分单元 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的距离,r_1 为源点 Q 到单元端点 P_1 的有向线段 $\vec{r}_1$ 的长度,r_2 为源点 Q 到单元端点 P_2 的有向线段 $\vec{r}_2$ 的长度。s_1 为有向线段 $\vec{r}_2$ 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上的投影,s_2 为有向线段 $\vec{r}_2$ 在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 上的投影。

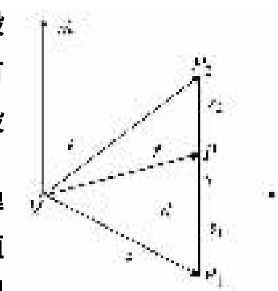

图1　插值基函数的局部坐标表示

当由方程组(10)解得边界结点的函数值 $u_i(i = 1,2,\cdots,N)$,再由(2)式可求出区域内任意点的数值解。

3 数值例算[3]

已知 $\Omega = \{(x,y)\mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 为单位圆内部区域,Γ 为其边界,$u = \cos\theta = x$ 为 Ω 内的调和函数。其边界条件是 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \cos\theta = x$。

利用本文的方法进行数值计算,用 Fortran95 编制通用程序,计算得单位圆内若干点的计算值与精确值的比较,结果见表1。

表1　单位圆内若干点的计算值与精确值的比较

x	y	近似解 u_h				精确解 u
		$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	
0.8	0.4	0.783 400 5	0.796 162 4	0.799 036 9	0.799 759 1	0.8
0.6	0.5	0.588 600 9	0.597 111 7	0.599 277 2	0.599 819 4	0.6
0.2	0.3	0.196 157 1	0.199 037 1	0.199 759 1	0.199 939 7	0.2
0.1	0.15	0.098 078 5	0.099 518 5	0.099 879 6	0.099 969 9	0.1
−0.1	−0.2	−0.098 078 6	−0.099 518 5	−0.099 879 6	−0.099 969 9	−0.1
−0.3	−0.5	−0.294 238 2	−0.298 555 5	−0.299 638 7	−0.299 909 7	−0.3
−0.5	0.6	−0.490 210 1	−0.497 592 4	−0.499 397 8	−0.499 849 4	−0.5
−0.7	−0.4	−0.686 532 5	−0.696 629 5	−0.699 156 8	−0.699 789 2	−0.7

注:N 为所剖分的边界元数目

表中的数据经过分析可以得出:采用本文的方法,由于重积分的内层积分采用精确积分,外层积分采用高斯数值积分,从而数值计算的结果达到较好的效果。而且随着边界剖分数目的增加,即单元长度减小,数值解将更逼近精确解。

事实上,由于内层积分采用精确积分,这将有效地提高计算的精度,因而比直接采用数值积分的效果好。函数 u 和近似解 u_h 的误差 $E(u) = |u - u_h|$ 与单元长度 h ($h = \frac{2\pi}{N}$, N 单元数目) 有如下关系

$$E(u) = O(h^{1+\alpha})$$

其中 $0 < \alpha < 1$。

参考文献:

[1] 祝家麟. 椭圆边值问题的边界元分析[M]. 北京:科学出版社,1991.

[2] Brebbia C A. The boundary element method for engineers[M]. London:Pentech Press,1978.

[3] 余德浩. 自然边界元法的数学理论[M]. 北京:科学出版社,1993.

[4] 张守贵,祝家麟,董海云. 用双层位势求解二维调和方程的 Neumann 外边值问题的 Galerkin 边界元解法[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2006,29(3):103-106.

[5] 张耀明,温卫东. 平面 Laplace 问题的等价间接变量边界积分方程[J]. 纯粹数学与应用数学,2003,19(3):274-285.

[6] Of G,Steinbach O,Wendland W L. The fast multipole method for the symmetric boundary integral formulation[J]. Ima Journal of Numerical Analysis,2006,26(2):272-296.

[7] 董海云,祝家麟,张守贵. 二维 Laplace 方程 Dirichlet 问题直接边界积分方程的 Galerkin 解法[J]. 重庆大学学报(自然科学版),2006,29(4):122-125.

[8] 张守贵. 一类变分问题的 Galerkin 解法[J]. 西华大学学报(自然科学版),2006,25(3):75.

Galerkin Boundary Element Method in Direct Boundary Integral Equation of 2-D Laplace Equation with Neumann Problem

ZHANG Shou-gui

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The direct boundary integral equation in Neumann problem of two-dimension Laplace equation $\Delta u(x) = 0$ is discussed. It is deduced from Green's formula and fundamental solution $-\frac{1}{2\pi}\ln|x - y|$. The Galerkin method with constant boundary elements is applied to solve the variational equation of second kind Fredholm integral equation. In computation of stiffness matrix, the exactly integral formula are used in the first order integral expression, the numerical integral formula are used in the second order integral expression. Thus the precision of the scheme is improved. The numerical results of example illustrate that the scheme presented is effective and practical.

Key words: direct boundary integral equation; Galerkin boundary element method; Laplace equation; Neumann problem

(责任编辑 黄 颖)