DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.06.007

# 图的减控制数的一个下界*

汪定国，罗　萍
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：$G=(V,E)$ 是一个简单图，定义一个函数 $f:V\to\{-1,0,+1\}$，这个函数 $f$ 是图 $G$ 的一个减控制函数，如果对任意 $x\in V(G)$，$x$ 的闭邻域 $N[x]$ 包含的函数值为 $+1$ 的顶点数大于函数值为 $-1$ 的顶点数。图 $G$ 的减控制数是 $G$ 的减控制函数的最小权，记为 $\gamma^-(G)$。本文利用图 $G$ 的阶数 $n$、最小度 $\delta$ 与最大度 $\Delta$ 给出了图 $G$ 的减控制数 $\gamma^-(G)$ 的一个紧的下界，并且表明了相关文献的主要结果是本文给出的下界的一个特例。

关键词：减控制函数；减控制数；正则图
中图分类号：O157.5　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2010)06-0033-03

## 1 基本定义及符号

设 $G=(V,E)$ 为一个无向简单图，其顶点集 $V=V(G)$ 和边集 $E=E(G)$，对于任意的 $u\in V(G)$，则 $N_G(u)$ 为 $u$ 点在 $G$ 中的邻域，$N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ 为 $u$ 点在 $G$ 中的闭邻域，在不引起混淆的情况下，$N_G(u)$ 和 $N_G[u]$ 分别记为 $N(u)$ 和 $N[u]$。定义顶点 $u$ 的度为 $\deg(u)=|N_G(u)|$。

对于一个实值函数 $f:V\to\mathbf{R}$ 和一个子集 $S\subseteq V(G)$，记 $f(S)=\sum\limits_{u\in S}f(u)$。对于任意的 $v\in V(G)$，$f(N[v])$ 简记为 $f[v]$。$f(V)$ 称为函数 $f$ 的权。

文中未说明的符号和术语同于文献[1-3]。

**定义 1**[2]　设 $G=(V,E)$ 为一个图，一个函数 $f:V\to\{-1,+1\}$ 称为图 $G$ 的一个符号控制函数，如果 $\forall v\in V$，均有 $f[v]\geqslant 1$。图 $G$ 的符号控制数定义为 $G$ 的符号控制函数的最小权，记为 $\gamma_S(G)$，即 $\gamma_S(G)=\min\{f(V)\mid f$ 为图 $G$ 的符号控制函数$\}$。

**定义 2**[2]　设 $G=(V,E)$ 为一个图，一个函数 $f:V\to\{-1,0,+1\}$ 称为图 $G$ 的一个减控制函数，如果 $\forall v\in V$，均有 $f[v]\geqslant 1$。图 $G$ 的减控制数定义为 $G$ 的减控制函数的最小权，记为 $\gamma^-(G)$，即 $\gamma^-(G)=\min\{f(V)\mid f$ 为图 $G$ 的减控制函数$\}$。

关于图的减控制数已经有很多相关的研究[4-9]。文献[10]中对于图的符号控制数给出了一个关于图的阶数 $n$、最小度 $\delta$ 与最大度 $\Delta$ 的紧的下界。利用类似于文献[10]的方法，本文对一个图的减控制数给出了一个关于图的阶数 $n$、最小度 $\delta$ 与最大度 $\Delta$ 的紧的下界，并且说明了文献[7]中对于正则图的减控制数的下界是本文这个下界的一个特例。

## 2 主要结果及证明

**定理 1**　对任意 $n$ 阶图 $G(n\geqslant 1)$，均有 $\gamma^-(G)\geqslant\dfrac{\delta-\Delta+2}{\delta+\Delta+2}n$，其中 $\delta$ 与 $\Delta$ 分别为图 $G$ 的最小度和最大度。

**证明**　令 $G$ 是一个顶点集 $V$，最小度 $\delta$ 并且最大度 $\Delta$ 的图，$f$ 是 $G$ 的一个最小权减控制函数。根据 $G$ 的顶点的度和函数值分划 $G$ 的顶点集如下

$$P_\Delta=\{v\in V\mid f(v)=+1\text{ 且 }\deg(v)=\Delta\},P_\delta=\{v\in V\mid f(v)=+1\text{ 且 }\deg(v)=\delta\}$$
$$P_\Theta=\{v\in V\mid f(v)=+1\text{ 且 }\delta<\deg(v)<\Delta\},Q_\Delta=\{v\in V\mid f(v)=0\text{ 且 }\deg(v)=\Delta\}$$

* 收稿日期：2010-05-07
作者简介：汪定国，男，讲师，博士研究生，研究方向为图论与组合最优化。

$$Q_\delta=\{v\in V\mid f(v)=0\text{ 且 }\deg(v)=\delta\},Q_\Theta=\{v\in V\mid f(v)=0\text{ 且 }\delta<\deg(v)<\Delta\}$$
$$M_\Delta=\{v\in V\mid f(v)=-1\text{ 且 }\deg(v)=\Delta\},M_\delta=\{v\in V\mid f(v)=-1\text{ 且 }\deg(v)=\delta\}$$
$$M_\Theta=\{v\in V\mid f(v)=-1\text{ 且 }\delta<\deg(v)<\Delta\}$$

于是 $V_\Delta=P_\Delta\cup Q_\Delta\cup M_\Delta$,$V_\delta=P_\delta\cup Q_\delta\cup M_\delta$,$V_\Theta=P_\Theta\cup Q_\Theta\cup M_\Theta$,$V=V_\Delta\cup V_\delta\cup V_\Theta$。并且令 $P=P_\Delta\cup P_\delta\cup P_\Theta$,$Q=Q_\Delta\cup Q_\delta\cup Q_\Theta$,$M=M_\Delta\cup M_\delta\cup M_\Theta$。由减控制数的定义知

$$\gamma^-(G)=f(V)=|P|-|M|=|V|-|Q|-2|M|$$

对任意顶点 $x\in V(G)$,$f[x]\geqslant 1$,因此有 $\sum\limits_{x\in V}f[x]\geqslant|V|$。在这个和式中,$f(x)$ 总共被计算了 $\deg(x)+1$ 次,所以 $\sum\limits_{x\in V}f(x)(\deg(x)+1)\geqslant|V|$。用对应于 $f(x)$ 的函数值 $+1$ 或 $-1$ 代替和式中的 $f(x)$,并展开和式得

$$\sum_{x\in P_\Delta}(\deg(x)+1)+\sum_{x\in P_\delta}(\deg(x)+1)+\sum_{x\in P_\Theta}(\deg(x)+1)-\sum_{x\in M_\Delta}(\deg(x)+1)-\sum_{x\in M_\delta}(\deg(x)+1)-\sum_{x\in M_\Theta}(\deg(x)+1)\geqslant|V|$$

因为 $\forall x\in P_\Delta$ 或 $M_\Delta$,$\deg(x)=\Delta$;$\forall x\in P_\delta$ 或 $M_\delta$,$\deg(x)=\delta$;$\forall x\in P_\Theta$ 或 $M_\Theta$,$\delta<\deg(x)<\Delta$。从而有

$$\sum_{x\in P_\Delta}(\Delta+1)+\sum_{x\in P_\delta}(\delta+1)+\sum_{x\in P_\Theta}\Delta-\sum_{x\in M_\Delta}(\Delta+1)-\sum_{x\in M_\delta}(\delta+1)-\sum_{x\in M_\Theta}(\delta+2)\geqslant|V|$$
$$|P_\Delta|(\Delta+1)+|P_\delta|(\delta+1)+|P_\Theta|\Delta-|M_\Delta|(\Delta+1)-|M_\delta|(\delta+1)-|M_\Theta|(\delta+2)\geqslant|V| \quad (1)$$

对 $i\in\{\Delta,\delta,\Theta\}$,$|P_i|=|V_i|-|M_i|-|Q_i|$。将(1)式中的 $|P_\Delta|$,$|P_\delta|$,$|P_\Theta|$ 分别用 $|P_\Delta|=|V_\Delta|-|M_\Delta|-|Q_\Delta|$,$|P_\delta|=|V_\delta|-|M_\delta|-|Q_\delta|$,$|P_\Theta|=|V_\Theta|-|M_\Theta|-|Q_\Theta|$ 替换并整理得

$$|V_\Delta|(\Delta+1)+|V_\delta|(\delta+1)+|V_\Theta|\Delta-2|M_\Delta|(\Delta+1)-2|M_\delta|(\delta+1)-|M_\Theta|(\Delta+\delta+2)-|Q_\Delta|(\Delta+1)-|Q_\delta|(\delta+1)-|Q_\Theta|\Delta\geqslant|V|\Leftrightarrow$$
$$|V_\Delta|(\Delta+1)+|V_\delta|(\delta+1)+|V_\Theta|\Delta\geqslant|V|+2|M_\Delta|(\Delta+1)+2|M_\delta|(\delta+1)+|M_\Theta|(\Delta+\delta+2)+|Q_\Delta|(\Delta+1)+|Q_\delta|(\delta+1)+|Q_\Theta|\Delta \quad (2)$$

将(2)式左边加上 $|V_\Theta|-|V_\Theta|$,右边加上 $|Q_\Theta|-|Q_\Theta|$,并整理得

$$\Delta|V_\Delta|+\delta|V_\delta|+(\Delta-1)|V_\Theta|\geqslant 2\Delta|M_\Delta|+2\delta|M_\delta|+(\Delta+\delta)|M_\Theta|+2|M|+\Delta|Q_\Delta|+\delta|Q_\delta|+(\Delta-1)|Q_\Theta|+|Q| \quad (3)$$

将(3)式左边加上 $\Delta|V_\delta|-\Delta|V_\delta|$ 得,左边 $=\Delta|V|+(\delta-\Delta)|V_\delta|-|V_\Theta|$ 将(3)式右边加上 $\Delta|M_\delta|-\Delta|M_\delta|+\delta|M_\Delta|-\delta|M_\Delta|+\Delta|Q_\delta|-\Delta|Q_\delta|$,并整理得

右边 $=(\Delta+\delta+2)|M|+(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(\delta-\Delta)|M_\delta|+\Delta|Q|+(\delta-\Delta)|Q_\delta|+|Q|-|Q_\Theta|$

从而
$$\Delta|V|\geqslant(\Delta-\delta)|V_\delta|+|V_\Theta|+(\Delta+\delta+2)|M|+(\Delta-\delta)|M_\Delta|-(\Delta-\delta)|M_\delta|+\Delta|Q|-(\Delta-\delta)|Q_\delta|+|Q|-|Q_\Theta|$$

即
$$\Delta|V|\geqslant(\Delta+\delta+2)|M|+(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(\Delta-\delta)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+|P_\Theta|+|M_\Theta| \quad (4)$$

下证

$$(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(\Delta-\delta)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+|P_\Theta|+|M_\Theta|\geqslant(\Delta+\delta+2)|M|+(\Delta+\delta+2)|Q|-\Delta|V| \quad (5)$$

即证 $(\delta+2)|V|\leqslant(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(\Delta-\delta)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+|P_\Theta|+|M_\Theta|+(\Delta+\delta+2)|P|=(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(2\Delta+2)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+(\Delta+\delta+3)|P_\Theta|+|M_\Theta|+(\Delta+\delta+2)|P_\Delta|$

当 $\Delta\geqslant\delta+1$ 时,有

$$(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(2\Delta+2)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+(\Delta+\delta+3)|P_\Theta|+|M_\Theta|+(\Delta+\delta+2)|P_\Delta|\leqslant(2\Delta+2)(|M_\Delta|+|P_\delta|+|Q|+|P_\Theta|+|M_\Theta|+|P_\Delta|+|M_\delta|)=(2\Delta+2)|V|$$

即证 $(\delta+2)|V|\leqslant(2\Delta+2)|V|$,而此结论显然成立。

当 $\Delta=\delta$ 时,有

$$(\Delta-\delta)|M_\Delta|+(2\Delta+2)|P_\delta|+(\Delta+1)|Q|+(\Delta+\delta+3)|P_\Theta|+|M_\Theta|+(\Delta+\delta+2)|P_\Delta|\leqslant (\Delta+\delta+3)(|M_\Delta|+|P_\delta|+|Q|+|P_\Theta|+|M_\Theta|+|P_\Delta|+|M_\delta|)=(\Delta+\delta+3)|V|$$

即证$(\delta+2)|V|\leqslant(\Delta+\delta+3)|V|$，而此结论也显然成立。

因此，(5)式成立。由(4)，(5)式可得$\Delta|V|\geqslant 2(\Delta+\delta+2)|M|+(\Delta+\delta+2)|Q|-\Delta|V|$。即$2\Delta|V|\geqslant(\Delta+\delta+2)(2|M|+|Q|)$，从而$2|M|+|Q|\leqslant\frac{2\Delta}{\Delta+\delta+2}|V|$，于是

$$\gamma^-(G)=|V|-2|M|-|Q|\geqslant|V|-\frac{2\Delta}{\delta+\Delta+2}|V|=\frac{\delta-\Delta+2}{\delta+\Delta+2}|V|=\frac{\delta-\Delta+2}{\delta+\Delta+2}n$$ 证毕

由此定理可以很容易得到文献[7]中的结论。

**推论1**　对每个$n$阶$r$-正则图$G=(V,E)$，$\gamma^-(G)\geqslant\frac{n}{r+1}$，并且这个界是紧的。

由推论1知，定理1的下界是紧的。

**参考文献：**


[1] Bollobas B. Modern graph theory [M]. New York: Springer, 1998.

[2] Dunbar J E, Goddard W, Hedetniemi S T, et al. The algorithmic complexity of minus domination in graphs[J]. Discrete Appl Math, 1996, 68: 73-84.

[3] Haynes T W, Hedetniemi S T, Slater P J. Fundamentals of domination in graphs[M]. NewYork: Marcel Dekker, 1998.

[4] Kang L Y, Kim H K, Sohn M Y. Minus domination number in $k$-partite graphs[J]. Discrete Math, 2004, 277: 295-300.

[5] Kang L Y, Cai M C. Upper minus domination in regular graphs[J]. Discrete Math, 2000, 219: 135-144.

[6] Dunbar J E, Hedetniemi S T, Henning M A, et al. Minus domination ingraphs[J]. Discrete Math, 1999, 199: 35-47.

[7] Dunbar J E, Hedetniemi S T, Henning M A, et al. Minus domination inregular graphs[J]. Discrete Math, 1996, 49: 311-312.

[8] Liu H L, Sun L. On the minus domination number of graphs [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2004, 54: 883-887.

[9] Damaschke P. Minus domination in small-degree graphs [J]. Discrete Appl Math, 2001, 108: 53-64.

[10] Haas R, Wexler T B. Bounds on the signed domination number of a graph[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2002, 11: 742-750.


## A Lower Bound on Minus Domination Number of a Graph


*WANG Ding-guo, LUO Ping*

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)



**Abstract**: Let $G=(V,E)$ be a simple graph, define a function $f: V\rightarrow\{-1,0,+1\}$, the function $f$ is a minus domination function of $G$ if every vertex $x\in V(G)$, the closed neighborhood $N[x]$ of $x$ contains more vertices with function value $+1$ than with $-1$. The minus domination number of $G$, denote by $\gamma^-(G)$, is the minimum weight of a minus domination function on $G$. In this paper, a sharp lower bound on the minus domination number of a general graph with order $n$ minimum degree $\delta$ and maximum degree $\Delta$ is given: It is shown that the main result in paper [7] is a special example of the lower bound from this paper.



**Key words**: minus domination function; minus domination number; regular graph


(责任编辑　黄　颖)