2010 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2010
第 27 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 27 No. 6

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.06.008

广义 θ-图的分数关联色数*

高 炜[1,2],梁 立[1]

(1. 云南师范大学 信息学院,昆明 650092;2. 苏州大学 数学科学学院,江苏 苏州,215006)

摘要:本文从分数色数的定义和已有结论出发,针对两种不同的情况分别给出广义 θ-图的分数关联色数,并由此进一步给出广义 θ-图的 r-冠图的分数关联色数,得到如下结论:$\mathrm{inc}_f(\theta_k)=\begin{cases} k+1, & \text{至少有一条路径的长不为 } 2 \\ \dfrac{k^2}{k-1}, & \text{所有路径的长均为 } 2 \end{cases}$;$\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))=\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))=k+r+1$。

关键词:分数色数;分数团;广义 θ-图;r-冠图

中图分类号:TQ92 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2010)06-0036-04

1 基本概念和引理

与图的分数着色有关的研究最早可以追溯到 1970 年对图的多重着色的研究,Scheinerman 和 Ullman 对此专题作了较为详尽的论述[1]。图的分数色数有着十分广泛的应用,例如 MWIS 问题可用分数着色模型来解决,研究特殊图形的分数色数有助于解决特殊多处理器结构下的 MWIS 问题[2-3]。关于图的分数着色有很多不同的等价定义方式,其中最常见也是最重要的定义有分数团和 $a:b$ 着色。本文只考虑无向、简单、有限图,文中涉及的符号和标记若没有特别说明,则与文献[4]一致。

定义 1[1] 设 G 是一个图,$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_t\}$ 是 G 的所有独立集的集合。若映射 $g:V(G)\to[0,1]$ 满足:对 $\forall S_i\in S$,$\sum\limits_{v\in S_i}g(v)\leqslant 1$,则称 g 是 G 的一个分数团,$\sum\limits_{v\in V(G)}g(v)$ 是分数团的权重。定义图 G 的分数色数为 $\chi_f(G)=\max\left\{\sum\limits_{v\in V(G)}g(v)\mid g \text{ 是图 } G \text{ 的一个分数团}\right\}$。

定义 2[1] 图 G 的 $a:b$ 着色,就是指给 G 中各顶点分配一个集合 $\{1,2,\cdots,a\}$ 的 b 元子集,使得相邻顶点的集合不交,则 $\chi_f(G)=\min\{a/b\mid G \text{ 存在 } a:b \text{ 着色}\}$。

定义 3[5] θ-图是在 u,v 两点间连三条内部不相交的路且至多有一条长为 1 的路所形成的图,在 u,v 两点间连 $k(k\geqslant 4)$ 条内部不相交的路且至多有一条长为 1 的路所形成的图,称为广义 θ-图。

本文对广义 θ-图的定义略加修改,规定在 u,v 两点间连 $k(k\geqslant 3)$ 条内部不相交的路且至多有一条长为 1 的路所形成的图,称为广义 θ-图,并记为 θ_k。

定义 4 图 G 的关联图 $S(G)$ 是这样一个图:$V(S(G))=\{(v,e)\mid v\in V(G),e\in E(G)$ 且 v 与 e 在 G 中关联$\}$,顶点 (u,e),(v,f) 之间存在边当且仅当下列 3 种情况之一:1)$u=v$;2)$e=f$;3)$uv=e$ 或 $uv=f$。图 G 的关联图的色数称为 G 的关联色数,记为 $\mathrm{inc}(G)$。用 $\mathrm{inc}_f(G)$ 表示 G 的分数关联色数,即 G 的关联图 $S(G)$ 的分数色数。

定义 5 图 $I_r(G)$ 表示 G 的 r-冠图,它是在图 G 的每个顶点上都粘接 r 条悬挂边所得到的图,1-冠图也称为王冠,在 G 的一个顶点 v 上粘接的 r 条悬挂边的新端点集记作 v^*。

引理 1[1] 对于图 G,有 $\omega(G)\leqslant\chi_f(G)\leqslant\chi(G)$ 成立,其中 $\omega(G)$ 称为图 G 的团数,即最大团的顶点数。

* 收稿日期:2010-03-24 修回日期:2010-07-22
资助项目:国家自然科学基金项目(No. 60903131)
作者简介:高炜,男,讲师,博士研究生,研究方向为图论及其应用。

2 主要定理以及证明

定理1 $\mathrm{inc}_f(\theta_k)=\begin{cases}k+1,\text{至少有一条路径的长不为}2\\ \dfrac{k^2}{k-1},\text{所有路径的长均为}2\end{cases}$。

证明 1)至少有一条路径的长度不为2。

设第i条路的长度为p_i,$1\leqslant i\leqslant k$,则该路上除去u,v,还有p_i-1个顶点分别记为$v_i^1,v_i^2,\cdots,v_i^{p_i-1}$(按从$u$到$v$排列)。下面分2种情况证明存在$\theta_k$的$k+1$关联着色,即$S(\theta_k)$的$k+1$着色。

情况1 存在某个$p_i=1$,$1\leqslant i\leqslant k$,不妨设$p_k=1$。$S(\theta_k)$中顶点(u,uv_1^1),(u,uv_2^1),$\cdots$,(u,uv_{k-1}^1),(u,uv)分别着$1,2,\cdots,k-1,k$;(v_1^1,uv_1^1),(v_2^1,uv_2^1),$\cdots$,(v_{k-1}^1,uv_{k-1}^1),(v,uv)均着$k+1$;$(v,v_1^{p_1-1}v)$,$(v,v_2^{p_2-1}v)$,$\cdots$,$(v,v_{k-1}^{p_{k-1}-1}v)$分别着$1,2,\cdots,k-1$中的某一种颜色,并使得(u,uv_i^1)和$(v,v_i^{p_i-1}v)$所着颜色不同(这里$1\leqslant i\leqslant k-1$,由于$k\geqslant3$,这样的着色一定存在);$(v_1^{p_1-1},v_1^{p_1-1}v)$,$(v_2^{p_2-1},v_2^{p_2-1}v)$,$\cdots$,$(v_{k-1}^{p_{k-1}-1},v_{k-1}^{p_{k-1}-1}v)$均着$k$。任取除$p_k$外的一条路径,该路径上的关联着色又可分以下3种情况考虑(可设所取路径为第i条路径,$1\leqslant i\leqslant k-1$,则$(u,uv_i^1)$,$(v_i^1,uv_i^1)$,$(v_i^{p_i-1},v_i^{p_i-1}v)$分别着$i,k+1,k$。令$(v,v_i^{p_i-1}v)$着$j$,$1\leqslant j\leqslant k-1$且$j\neq i$)。

① 若$p_i-2\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$。如果$p_i=2$,显然$p_i$上的关联着色正常 如果$p_i=5,8,\cdots$,则该路径上除$uv_i^1$,$v_i^{p_i-1}v$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着k,j,i,k,j,i。

② 若$p_i-2\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$。如果$p_i=3$,则$(v_i^1,v_i^1v_i^2)$,$(v_i^2,v_i^1v_i^2)$分别着$j,i$ 如果$p_i=6,9,\cdots$,则该路径上除$uv_i^1,v_i^{p_i-1}v,v_i^1v_i^2$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着k,j,i,k,j,i。

③ 若$p_i-2\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$。如果$p_i=4$,则$(v_i^1,v_i^1v_i^2)$,$(v_i^2,v_i^1v_i^2)$,$(v_i^2,v_i^3v_i^2)$,$(v_i^3,v_i^3v_i^2)$分别着$k,i,j,k+1$ 如果$p_i=7,10,\cdots$,则该路径上除$uv_i^1,v_i^{p_i-1}v,v_i^1v_i^2,v_i^3v_i^2$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着$k,j,k+1,k,j,k+1$。

易验证,上述3种情况下的着色为该路径上的正常关联着色。

情况2 所有$p_i\geqslant2$,$1\leqslant i\leqslant k$,不妨设第k条路径的长度不为2,即$p_k\geqslant3$。$S(\theta_k)$中顶点(u,uv_1^1),(u,uv_2^1),$\cdots$,(u,uv_{k-1}^1),(u,uv_k^1)分别着$1,2,\cdots,k-1,k$;(v_1^1,uv_1^1),(v_2^1,uv_2^1),$\cdots$,(v_{k-1}^1,uv_{k-1}^1),(v_k^1,uv_k^1)均着$k+1$;$(v,v_1^{p_1-1}v)$,$(v,v_2^{p_2-1}v)$,$\cdots$,$(v,v_{k-1}^{p_{k-1}-1}v)$分别着$1,2,\cdots,k-1$中的某一种颜色,并使得(u,uv_i^1)和$(v,v_i^{p_i-1}v)$所着颜色不同(这里$1\leqslant i\leqslant k-1$,由于$k\geqslant3$,这样的着色一定存在);$(v,v_k^{p_k-1}v)$着$k+1$;$(v_1^{p_1-1},v_1^{p_1-1}v)$,$(v_2^{p_2-1},v_2^{p_2-1}v)$,$\cdots$,$(v_{k-1}^{p_{k-1}-1},v_{k-1}^{p_{k-1}-1}v)$,$(v_k^{p_k-1},v_k^{p_k-1}v)$均着$k$。任取除$p_k$外的一条路径,该路径上的关联着色可根据情况1中的①,②,③进行着色。对于p_k,由于$k\geqslant3$,从而存在整数j,t使$1\leqslant j,t\leqslant k-1$且$j\neq t$,下面又分3种情况考虑。

① 若$p_k-2\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$。则该路径上除$uv_k^1,v_k^{p_k-1}v$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着$t,k,j,t,k+1,j$。

② 若$p_k-2\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$。如果$p_k=3$,则$(v_k^1,v_k^1v_k^2)$,$(v_k^2,v_k^1v_k^2)$分别着$t,j$ 如果$p_k=6,9,\cdots$,则该路径上除$uv_k^1,v_k^{p_k-1}v,v_k^1v_k^2$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着k,t,j,k,t,j。

③ 若$p_k-2\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$。如果$p_k=4$,则$(v_k^1,v_k^1v_k^2)$,$(v_k^2,v_k^1v_k^2)$,$(v_k^2,v_k^3v_k^2)$,$(v_k^3,v_k^3v_k^2)$分别着$t,j,k+1,t$ 如果$p_k=7,10,\cdots$,则该路径上除$uv_k^1,v_k^{p_k-1}v,v_i^1v_i^2,v_i^3v_i^2$外,依次每3边为一组,所对应关联图上6个顶点依次着$j,k+1,t,j,k+1,t$。

易验证,上述3种情况下的着色为p_k上的正常关联着色。所以在至少有一条路径的长度不为2的条件下,由引理1得$\mathrm{inc}_f(\theta_k)\leqslant\mathrm{inc}(\theta_k)\leqslant k+1$。另一方面,$\omega(S(\theta_k))=k+1$(例如$(u,uv_1^1)$,$(u,uv_2^1)$,$\cdots$,$(u,uv_{k-1}^1)$,$(u,uv_k^1)$,$(v_1^1,uv_1^1)$就是顶点数为$k+1$的团),故由引理1知$\mathrm{inc}(\theta_k)\geqslant\mathrm{inc}_f(\theta_k)\geqslant k+1$,从而$\mathrm{inc}_f(\theta_k)=\mathrm{inc}(\theta_k)=k+1$。

2)所有路径的长度均为2。在这种情况下,不妨设每条路径的中间点分别为$t_1,t_2,\cdots,t_k$。

首先给出$S(\theta_k)$的$k^2:k-1$着色。令集合$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_{k^2-k},y_1,y_2,\cdots,y_k\}$,顶点$(u,ut_1)$,$(u,ut_2)$,$\cdots$,

(u,ut_k) 分别依次分配集合 U 的 $k-1$ 元子集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\}$,$\{x_k,x_{k+1},\cdots,x_{2k-2}\}$,$\cdots$,$\{x_{k^2-2k+2},x_{k^2-2k+3},\cdots,x_{k^2-k}\}$;顶点 (t_1,ut_1),(t_2,ut_2),$\cdots$,(t_k,ut_k) 分别依次分配 $\{y_2,y_3,\cdots,y_k\}$,$\{y_1,y_3,\cdots,y_k\}$,$\cdots$,$\{y_1,y_2,\cdots,y_{k-2},y_{k-1}\}$,即顶点 (t_i,ut_i) 分配 $\{y_1,y_2,\cdots,y_k\}-\{y_i\}$;顶点 (t_1,vt_1),(t_2,vt_2),$\cdots$,(t_k,vt_k) 分别依次分配 $\{x_k,x_{2k-1},x_{3k-2},\cdots,x_{k^2-2k+2}\}$,$\{x_1,x_{2k-1},x_{3k-2},\cdots,x_{k^2-2k+2}\}$,$\cdots$,$\{x_1,x_k,\cdots,x_{k^2-3k+3}\}$,即 (t_i,vt_i) 分配集合 $\{x_1,x_k,x_{2k-1},x_{3k-2},\cdots,x_{k^2-2k+2}\}$ 中除第 i 个元素外的其余 $k-1$ 个元素 $(1\leqslant i\leqslant k)$;顶点 (v,vt_1),(v,vt_2),$\cdots$,(v,vt_k) 分别依次分配 $\{y_1,x_2,\cdots,x_{k-1}\}$,$\{y_2,x_{k+1},\cdots,x_{2k-2}\}$,$\cdots$,$\{y_k,x_{k^2-2k+3},\cdots,x_{k^2-k}\}$,即 (v,vt_i) 分配 y_i 以及 (u,ut_i) 所分配的 $k-1$ 元子集的后 $k-2$ 个元素 $(1\leqslant i\leqslant k)$。不难验证,这就是 $S(\theta_k)$ 的 $k^2:k-1$ 着色。从而由定义知 $\mathrm{inc}_f(\theta_k)\leqslant\frac{k^2}{k-1}$。

其次,构造 $S(\theta_k)$ 的分数团 g,使得 $\sum_{x\in V(S(\theta_k))}g(x)=\frac{k^2}{k-1}$:对 $\forall x\in\{(u,ut_1),(u,ut_2),\cdots,(u,ut_k);(v,vt_1),(v,vt_2),\cdots,(v,vt_k)\}$,有 $g(x)=\frac{1}{2}$;对 $\forall x\in\{(t_1,ut_1),(t_2,ut_2),\cdots,(t_k,ut_k);(t_1,vt_1),(t_2,vt_2),\cdots,(t_k,vt_k)\}$,有 $g(x)=\frac{1}{2(k-1)}$。令值为 $\frac{1}{2}$ 的顶点为第一类顶点,值为 $\frac{1}{2(k-1)}$ 的顶点为第二类顶点。对于 $S(\theta_k)$ 的任意独立集 S,可知 S 最多包含两个第一类顶点,且一个属于 $\{(u,ut_1),(u,ut_2),\cdots,(u,ut_k)\}$,另一个属于 $\{(v,vt_1),(v,vt_2),\cdots,(v,vt_k)\}$,下面分 3 种情况讨论。

①S 包含 2 个第一类顶点,则 S 中不含任何第二类顶点,从而 $\sum_{x\in S}g(x)=1$。

②S 包含 1 个第一类顶点,则 S 中最多包含 $k-1$ 个第二类顶点,从而 $\sum_{x\in S}g(x)\leqslant 1$。

③S 不包含第一类顶点,则 S 最多包含 k 个第二类顶点,从而 $\sum_{x\in S}g(x)\leqslant\frac{k}{2(k-1)}<1$。

从而 g 是值为 $\sum_{x\in V(S(\theta_k))}g(x)=\frac{1}{2}\times 2k+\frac{1}{2(k-1)}\times 2k=\frac{k^2}{k-1}$ 的分数团,由定义 1 可知 $\mathrm{inc}_f(\theta_k)\geqslant\frac{k^2}{k-1}$。

综合上述两方面可知 $\mathrm{inc}_f(\theta_k)=\frac{k^2}{k-1}$。 证毕

定理 2 $\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))=\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))=k+r+1$。

证明 1)当至少有一条路径的长不为 2 时,不妨设第 k 条路径的长 $\geqslant 3$ 或 $=1$。

由定理 1 的证明过程可知 $\mathrm{inc}(\theta_k)=\mathrm{inc}_f(\theta_k)=k+1$,且存在 θ_k 的 $k+1$ 正常关联着色使 (v_1^1,uv_1^1),(v_2^1,uv_2^1),$\cdots$,(v_{k-1}^1,uv_{k-1}^1),(v_k^1,uv_k^1) 均着 $k+1$;$(v_1^{p_1-1},v_1^{p_1-1}v)$,$(v_2^{p_2-1},v_2^{p_2-1}v)$,$\cdots$,$(v_{k-1}^{p_{k-1}-1},v_{k-1}^{p_{k-1}-1}v)$,$(v_k^{p_k-1},v_k^{p_k-1}v)$ 均着 k(顶点 v_k^1 可能为 v,此时 $v_k^{p_k-1}$ 为 u);(u,uv_i^1) 和 $(v,v_i^{p_i-1}v)$ 所着颜色不同 $(1\leqslant i\leqslant k-1)$。

设 $u^*=\{u_1,u_2,\cdots,u_r\}$,$v^*=\{v_1,v_2,\cdots,v_r\}$,$v_i^j(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant p_i-1)$ 的 r 个悬挂点集合记为 $\{v_{i,j}^1,v_{i,j}^2,\cdots,v_{i,j}^r\}$。在 $S(I_r(\theta_k))$ 中,顶点 (u,u_1u),(u,u_2u),$\cdots$,(u,u_ru) 分别着 $k+2,k+3,\cdots,k+r+1$;顶点 (u_1,u_1u),(u_2,u_2u),$\cdots$,(u_r,u_ru) 均着 $k+1$;顶点 (v,v_1v),(v,v_2v),$\cdots$,(v,v_rv) 分别着 $k+2,k+3,\cdots,k+r+1$;顶点 (v_1,v_1v),(v_2,v_2v),$\cdots$,(v_r,v_rv) 均着 k;顶点 $(v_i^j,v_i^jv_{i,j}^1)$,$(v_i^j,v_i^jv_{i,j}^2)$,$\cdots$,$(v_i^j,v_i^jv_{i,j}^r)$ 分别着 $k+2,k+3,\cdots,k+r+1$;顶点 $(v_{i,j}^1,v_i^jv_{i,j}^1)$,$(v_{i,j}^2,v_i^jv_{i,j}^2)$,$\cdots$,$(v_{i,j}^r,v_i^jv_{i,j}^r)$ 均着与 $(v_i^{j-1},v_i^jv_i^{j-1})$ 或 $(v_i^{j+1},v_i^jv_i^{j+1})$ 相同的颜色(这里 v_i^{j-1} 可能为 u,v_i^{j+1} 可能为 v);其他顶点的着色均与它们在 $S(\theta_k)$ 中一致。

不难验证,此着色为 $I_r(\theta_k)$ 的 $k+r+1$ 正常关联着色。由引理 1 知 $\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))\leqslant\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))\leqslant k+r+1$。另一方面,$\omega(S(I_r(\theta_k)))=k+r+1$(例如 (u,uv_1^1),(u,uv_2^1),$\cdots$,(u,uv_{k-1}^1),(u,uv_k^1),(u,u_1u),(u,u_2u),$\cdots$,$(u,u_ru)(v_1^1,uv_1^1)$ 就是顶点数为 $k+r+1$ 的团),因此 $\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))\geqslant\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))\geqslant k+r+1$,从而 $\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))=\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))=k+r+1$。

2)当所有路径的长度均为 2 时。

记每条路径的中间点 $t_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 的 r 条悬挂点分别为 $t_i^1,t_i^2,\cdots,t_i^r$。顶点 (u,ut_1),(u,ut_2),$\cdots$,(u,ut_k) 分别着 $1,2,\cdots,k$;顶点 (t_1,ut_1),(t_2,ut_2),$\cdots$,(t_k,ut_k) 均着 $k+1$;顶点 (t_1,vt_1),(t_2,vt_2),$\cdots$,(t_k,vt_k) 均着 $k+$

$r+1$；顶点(v,vt_1)，(v,vt_2)，…，(v,vt_k)分别着$1,2,\cdots,k$；顶点(u,u_1u)，(u,u_2u)，…，(u,u_ru)分别着$k+2$，$k+3,\cdots,k+r+1$；顶点(u_1,u_1u)，(u_2,u_2u)，…，(u_r,u_ru)均着$k+1$；顶点(v,v_1v)，(v,v_2v)，…，(v,v_rv)分别着$k+1,k+2,\cdots,k+r$；顶点(v_1,v_1v)，(v_2,v_2v)，…，(v_r,v_rv)均着$k+r+1$；顶点$(t_i,t_it_i^1)$，$(t_i,t_it_i^2)$，…，$(t_i,t_it_i^r)$分别着$k+2,k+3,\cdots,k+r$，$j(1\leqslant j\leqslant k$且$i\neq j)$；顶点$(t_i^1,t_it_i^1)$，$(t_i^2,t_it_i^2)$，…，$(t_i^r,t_it_i^r)$均着$i$。

不难验证，此着色为$I_r(\theta_k)$的$k+r+1$正常关联着色，即$\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))\leqslant \mathrm{inc}(I_r(\theta_k))\leqslant k+r+1$。另一方面，$\omega(S(I_r(\theta_k)))=k+r+1$，从而$\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))\geqslant \mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))\geqslant k+r+1$。因此$\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))=\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))=k+r+1$。 证毕

参考文献：

[1] Scheinerman E R, Ullman D H. Fractional graph theory [M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1997.

[2] 高炜，梁立，张超. 超图的分数着色研究[J]. 云南师范大学学报：自然科学版，2009，29(1)：33-36.

[3] 高炜，梁立，夏幼明. 几种特殊图形的分数色数研究[J]. 山西师范大学学报：自然科学版，2008，22(4)：16-20.

[4] Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with applications [M]. New York: Macmillan Press Lid, 1976.

[5] 张正成，张忠辅. 广义θ-图的邻强边染色[J]. 华北工学院学报，2003，24(6)：403-405.

[6] 廖江东. 关于一类树的优美性[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2007，24(2)：16-18.

[7] 盛秀艳. 一类特殊连通图的最大亏格的下界[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2006，23(3)：40-41，48.

[8] 黄光鑫，尹凤. 一类基于二部图的(g,f)-3-覆盖图的研究[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2005，22(2)：9-11.

On Fractional Incidence Chromatic Number of Generalized θ-graph

GAO Wei[1,2], *LIANG Li*[1]

(1. School of Information, Yunnan Normal University, Kunming 650092;
2. School of Mathematical Science, Suzhou University, Suzhou Jiangsu 215006, China)

Abstract: The issue of coloring is a very important in the graph theory. Fractional coloring as generalized coloring has used in many fields of computer science. This paper compute the fractional incidence chromatic number of generalized θ-graph from to two different situations and using its definition and given lemma. Then, the fractional incidence chromatic number of r-corona graph for generalized θ-graph is obtained. The main results we give as follows: 1) $\mathrm{inc}_f(\theta_k)=\begin{cases} k+1, & \text{at least one path from } u \text{ to } v \text{ has length} \neq 2 \\ \dfrac{k^2}{k-1}, & \text{otherwise} \end{cases}$; 2) $\mathrm{inc}_f(I_r(\theta_k))=\mathrm{inc}(I_r(\theta_k))=k+r+1$.

Key words: fractional chromatic number; fractional clique; generalized θ-graph; r-corona graph

(责任编辑　黄　颖)