DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693.2010.06.011

一类非线性波动方程的柯西问题*

王云青[1], 冯改红[2], 李梅玲[1]
(1. 兰州商学院 陇桥学院, 兰州 730101; 2. 郑州大学 升达经贸管理学院, 郑州 451191)

摘要:文章主要考察一类非线性波动方程 $u_{tt}+u_{xxxx}+\lambda u=\sigma(u_x)_x$, $\lambda>0$ 的柯西问题解的存在性和唯一性。当 $\sigma(u_x)_x=-\beta(|u_x|^pu_x)_x$, $\beta>0$, $p>0$ 时,通过构造稳定集(位势井) $W=\{u\in H^2(\mathbb{R})\mid \|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2<\frac{2(p+2)}{p}d\}$ 和不稳定集 $V=\{u\in H^2(\mathbb{R})\mid \|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2>\frac{2(p+2)}{p}d\}$,得到了 W 和 V 在上述方程的流下是不变的,并证明了如果初始能量 $E(0)\leqslant d$,那么当初值 $u_0\in\overline{W}$ 时,问题存在惟一整体解 $u\in C^1([0,\infty);H^2)$;当初值 $u_0\in V$ 时,问题的解在有限时刻 $T_1\in\left(t_1,t_1+\frac{4\phi(t_1)}{p\phi'(t_1)}\right)$ 发生爆破。

关键词:非线性波动方程;柯西问题;位势井;整体解;爆破

中图分类号:O175.29　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2010)06-0048-04

本文主要研究一类在粘弹性流中提出的带有色散项的非线性波动方程

$$u_{tt}+u_{xxxx}+\lambda u=\sigma(u_x)_x,(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x),x\in\mathbb{R}\tag{2}$$

其中 $\sigma(u_x)_x=-\beta(|u_x|^pu_x)_x$, $\lambda>0$ 是常数, $u_0(x)$, $u_1(x)$ 是给定的初值, $u(x,t)$ 是未知函数。关于此类方程整体解的存在性与爆破已有很多成果,见文献[1,2]。在文献[3]中,作者证明了当 $u_0\in H^2$, $u_1\in L^2$, $\sigma\in C^N(\mathbb{R})$ 时问题(1),(2)存在唯一解 $u\in C([0,T];H^2)$。

国内外很多学者利用位势井方法做了大量工作,但是他们中很少给出位势井的清晰结构[4-5]。在文献[6]中作者通过引进一族位势井研究了一类非线性 Klein-Gordon 方程解的整体存在性与不存在性的门槛结果;S. Wang 在文献[7-8]中给出了清晰的位势井结构,并证明了一类 Boussinesq 方程和 Rosenau 方程解的整体存在性及爆破。本文构造稳定集(位势井)和不稳定集的方法,较前人的位势井结构简单明了[9-10],进而证明了当临界能量 $E(0)=d$ 时问题(1),(2)解的存在性及有限时刻的爆破,其中 d 为位势井深度。

1 主要结果

设 $u_0\in H^2$, $u_1\in L^2$, $u\in C([0,T];H^2)\cap C^1([0,T];L^2)$ 是问题(1),(2)的解,则对任意的 $t\in[0,T_0)$,等式

$$E(t)=\frac{1}{2}[\|u_t\|^2+\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2]-\frac{\beta}{p+2}\|u_x\|_{p+2}^{p+2}=E(0),\ \forall t\in(0,T_0)\tag{3}$$

恒成立,其中 T_0 是解 u 存在的最大时刻。

现在,考虑方程(3)中势能部分,设

$$J(u)=\frac{1}{2}\|u_{xx}\|^2+\frac{\lambda}{2}\|u\|^2-\frac{\beta}{p+2}\|u_x\|_{p+2}^{p+2}$$

由 Sobolev 嵌入定理,易知

$$\|u_x\|_{p+2}\leqslant C_*(\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2)^{\frac{1}{2}},\forall u\in H^2$$

其中 $C_*=\sup\limits_{u\in H^2\setminus\{0\}}\frac{\|u_x\|_{p+2}}{(\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2)^{\frac{1}{2}}}$,由(3)式可得

$$\frac{1}{2}[\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2]-\frac{\beta}{p+2}C_*^{p+2}[\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2]^{\frac{p+2}{2}}\leqslant J(u(t))\leqslant E(0),\ \forall t\in[0,T_0)$$

已知函数 $h(y)=\frac{1}{2}y-\frac{\beta}{p+2}C_*^{p+2}y^{\frac{p+2}{2}}$ 在 $[0,y_0)$ 上严格增加,在 $(y_0,+\infty)$ 上严格减少,这里 $y_0=$

---

* 收稿日期:2010-01-11　　修回日期:2010-05-29
作者简介:王云青,男,讲师,硕士,研究方向为偏微分方程。

$\beta^{-\frac{2}{p}}C_*^{-\frac{2(p+2)}{p}}$，设 $d = \max_{y\in[0,+\infty)} h(y) = h(y_0) = \frac{p}{2(p+2)}\beta^{-\frac{2}{p}}C_*^{-\frac{2(p+2)}{p}}$，则 $y_0 = \frac{2(p+2)}{p}d$。因而，定义稳定集(位势井)W 和不稳定集 V 如下[7-8,11]

$$W = \{u \in H^2(\mathbb{R}) \mid \|u_{xx}\|^2 + \lambda\|u\|^2 < \frac{2(p+2)}{p}d\}$$

$$V = \{u \in H^2(\mathbb{R}) \mid \|u_{xx}\|^2 + \lambda\|u\|^2 > \frac{2(p+2)}{p}d\}$$

下面引理说明，W 和 V 在问题(1)，(2)的流下是不变的。

引理1 设 $u_0 \in H^2, u_1 \in L^2, \beta > 0, p > 0$，且 $u \in C([0,T_0);H^2) \cap C^1([0,T];L^2)$ 是问题(1)，(2)的唯一解，其中 T_0 是解 $u(t)$ 存在的最大时刻，若 $E(0) < \mathrm{d}$，则 $\forall t \in [0,T_0)$，有 i) 若 $u_0 \in W$，则 $u(t) \in W$；ii) 若 $u_0 \in V$，则 $u(t) \in V$。

证明 i) 假设结论不成立，即存在 $t_0 \in (0,T_0)$，使得 $u(t) \in W$，$t \in [0,t_0)$，$u(t_0) \in \partial W$，i.e. $\|u_{xx}(t_0)\|^2 + \lambda\|u(t_0)\|^2 = \frac{2(p+2)}{p}d$，因此有

$$J(u(t_0)) \geqslant \frac{1}{2}[\|u_{xx}(t_0)\|^2 + \lambda\|u(t_0)\|^2] - \frac{\beta C_*^{p+2}}{p+2}[\|u_{xx}(t_0)\|^2 + \lambda\|u(t_0)\|^2]^{\frac{p+2}{2}} = d$$

另一方面，由(3)式可知

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|^2 + J(u) = E(0) < d,\ t \in (0,T_0)$$

所以，$J(u) < d$，得出矛盾。 证毕

ii) 类似可证。

引理2 设 $u_0 \in H^2, u_1 \in L^2, \beta > 0, p > 0$，如果 $E(0) < d$，$\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2 < \frac{2(p+2)}{p}d$，则问题(1)，(2)有唯一整体解 $u \in C^1([0,\infty);H^2)$，$u_t \in C([0,\infty);L^2)$，且对 $t \in [0,\infty)$，$u(t) \in W$。

证明 由引理1，可得 $\|u_{xx}(t)\|^2 + \lambda\|u(t)\|^2 < \frac{2(p+2)}{p}d$，由 Sobolev 嵌入定理知，$\|u(t)\|_{L^\infty}$ 在有限时刻不爆破，则由二择一性质知，$T_0 = \infty$，所以问题(1)，(2)有唯一整体解 $u \in C^1([0,\infty);H^2)$，$u_t \in C([0,\infty);L^2)$。 证毕

引理3 设 $u_0 \in H^2, u_1 \in L^2, \beta > 0, p > 0, u \in C([0,T_0);H^2) \cap C^1([0,T_0);L^2)$ 是 Cauchy 问题(1)，(2)的唯一解，T_0 是解 $u(t)$ 的最大存在时间，若 $E(0) = d$ 且 $(u_0,u_1) \geqslant 0$，则 $\forall t \in [0,T_0)$，如果 $u_0 \in V$，那么 $u(t) \in V$。

证明 假设结论不成立，由 $\|u_{xx}(t)\|^2 + \lambda\|u(t)\|^2$ 的连续性，存在 $t_0 \in (0,T_0)$，使得

$$\|u_{xx}(t_0)\|^2 + \lambda\|u(t_0)\|^2 = \frac{2(p+2)}{p}d$$

因此有 $J(u(t_0)) \geqslant d$。又 $E(t_0) = E(0) = d$，$J(u(t_0)) \leqslant d$，则

$$J(u(t_0)) = d, \quad u_t(t_0) = 0 \tag{4}$$

另一方面，设 $\phi(t) = \|u(t)\|^2$，则 $\phi'(t) = 2(u,u_t)$，$\phi'(0) = 2(u_0,u_1) \geqslant 0$。由(1)式和(3)式得

$$\varphi''(t) = 2(u,u_{tt}) + 2\|u_t\|^2 = -2\|u_{xx}\|^2 - 2\lambda\|u\|^2 + 2\beta\|u_x\|_{p+2}^{p+2} + 2\|u_t\|^2 = (p+4)\|u_t\|^2 + p(\|u_{xx}\|^2 + \lambda\|u\|^2) - 2(p+2)E(0) > 0, \forall t \in (0,t_0)$$

因此，$\varphi'(t)$ 在 $[0,t_0]$ 上是严格增函数，且 $\varphi'(t_0) > \varphi'(0) \geqslant 0$，与(4)式矛盾。 证毕

定理1 设 $u_0 \in H^2, u_1 \in L^2, \beta > 0, p > 0$，如果 $E(0) \leqslant d$，$u_0 \in \overline{W}$，则问题(1)，(2)有唯一解 $u \in C^1([0,\infty);H^2)$，$u_t \in C([0,\infty);L^2)$，且对 $t \in [0,\infty)$，$u(t) \in \overline{W}$。

证明 由文献[3]可知，问题(1)，(2)有唯一局部解 $u \in C([0,T_0);H^2)$，其中 T_0 是 $u(t)$ 的最大存在时间，下面证明 $T_0 = \infty$。注意到对任意的 $\alpha > 0$

$$J(\alpha u) = \frac{\alpha^2}{2}[\|u_{xx}\|^2 + \lambda\|u\|^2] - \frac{\beta\alpha^{p+2}}{p+2}\|u_x\|_{p+2}^{p+2}$$

和

$$\|u_{0x}\|_{p+2}^{p+2} \leqslant C_*^{p+2}(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2)^{\frac{p+2}{2}} \leqslant C_*^{p+2}(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2)(\frac{2(p+2)}{p}d)^{\frac{p}{2}} = \frac{1}{\beta}(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2)$$

由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}J(\alpha u_0) = \alpha(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2) - \beta\alpha^{p+1}\|u_{0x}\|_{p+2}^{p+2} \geqslant \alpha(1-\alpha^p)\cdot(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2), \forall \alpha \in (0,1)$$

选取序列 $\{\alpha_m\}$，使得 $0 < \alpha_m < 1, m = 1,2,\cdots$，且当 $m \to \infty$ 时，$\alpha_m \to 1$。设 $u_{0m} = \alpha_m u_0, u_{1m} = \alpha_m u_1$，考虑初始条件

$$u(x,0) = u_{0m}(x),\ u_t(x,0) = u_{1m}(x) \tag{5}$$

和(1)式，则

$$\|u_{0mxx}\|^2 + \lambda\|u_{0m}\|^2 = \alpha_m^2(\|u_{0xx}\|^2 + \lambda\|u_0\|^2) <$$

$$\frac{2(p+2)}{p}d$$

且

$$E_m(0)=\frac{1}{2}[\|u_{1m}\|^2+\|u_{0mxx}\|^2+\lambda\|u_{0m}\|^2]-\frac{\beta}{p+2}\|u_{0mx}\|_{p+2}^{p+2}=\frac{1}{2}\alpha_m^2\|u_1\|^2+J(\alpha_m u_0)$$

若 $\|u_1\|^2=0$ 且 $u_0=0$,则 $E_m(0)=0<d$;若 $\|u_1\|^2\neq 0$ 或 $u_0\neq 0$,则 $E_m(0)<\frac{1}{2}\|u_1\|^2+J(u_0)=E(0)\leqslant d$。由引理2,对每一个 $m\in\mathbf{N}$,问题(1),(5)存在唯一整体解 $u_m\in C^1([0,\infty);H^2)$,$u_{mt}\in C([0,\infty);L^2)$,且满足

$$(u_{mt},v)+\int_0^t[(u_{mxx},v_{xx})+\lambda(u_m,v)-\beta(|u_{mx}|^p u_{mx},v_x)]\mathrm{d}x=(u_{mt},v),\ \forall v\in H^2 \tag{6}$$

且

$$\frac{1}{2}\|u_{mt}\|^2+J(u_m)=E_m(0)<d,$$

$$\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2<\frac{2(p+2)}{p}d \tag{7}$$

因为

$$\|u_{mx}\|_{p+2}^{p+2}\leqslant C_*^{p+2}(\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2)^{\frac{p+2}{2}}\leqslant\frac{1}{\beta}(\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2)$$

$$J(u_m)\geqslant\frac{1}{2}(\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2)-\frac{1}{p+2}(\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2)=\frac{p}{2(p+2)}(\|u_{mxx}\|^2+\lambda\|u_m\|^2)\geqslant 0$$

可得

$$\|u_{mt}\|^2\leqslant 2d \tag{8}$$

$$\|u_{mx}\|_{p+2}\leqslant C_*\left(\frac{2(p+2)}{p}d\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

由(7)~(9)式可知,存在 $\tilde{u}\in\overline{W}$ 和序列 $\{u_k\}$,使得当 $k\to\infty$ 时,$u_k\to\tilde{u}$ 在 $L^\infty(0,\infty;H^2)$ 中弱 $*$ 收敛,且在 $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 中几乎处处收敛;$u_{kt}\to\tilde{u}_t$ 在 $L^\infty(0,\infty;L^2)$ 中弱 $*$ 收敛;$|u_{kx}|^p u_{kx}\to|\tilde{u}_x|^p\tilde{u}_x$ 在 $L^\infty(0,\infty;L^{\frac{p+2}{p+1}})$ 中弱 $*$ 收敛。

在(6)中,令 $m=k\to\infty$,有

$$(\tilde{u}_t,v)+\int_0^t[(\tilde{u}_{xx},v_{xx})+\lambda(\tilde{u},v)-\beta(|\tilde{u}_x|^p\tilde{u}_x)]\mathrm{d}\tau=(u_1,v),\forall v\in H^2,t\in[0,\infty)$$

这说明 $\tilde{u}$ 满足(1)式,此外,有 $\tilde{u}(x,0)=u_0(x)$,$\tilde{u}_t(x,0)=u_1(x)$。则 $\tilde{u}$ 是问题(1),(2)的整体解,由问题(1),(2)解的唯一性,可得 $\tilde{u}=u$ 在 $\mathbb{R}\times[0,T_0)$,且

$$\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2=\|\tilde{u}_{xx}\|^2+\lambda\|\tilde{u}\|^2\leqslant\frac{2(p+2)}{p}d,\forall t\in[0,T_0)$$

故 $T_0=\infty$,且 $u\in C^1([0,\infty);H^2)$,$u_t\in C([0,\infty);L^2)$。　　证毕

定理2　设 $u_0\in H^2$,$u_1\in L^2$,$\beta>0$,$p>0$,如果 $E(0)\leqslant d$,$\|u_{0xx}\|^2+\lambda\|u_0\|^2>\frac{2(p+2)}{p}d$,且当 $E(0)=d$ 时,$(u_0,u_1)\geqslant 0$,则问题(1),(2)的解在有限时刻爆破。

证明　局部解 $u\in C([0,T_0);H^2)$ 满足(3)式,T_0 是解 u 的最大存在时间,证明 $T_0<\infty$,否则,设

$$\phi(t)=\|u\|^2 \tag{10}$$

则 $\phi'(t)=2(u_t,u)$。利用 Schwartz 不等式,有

$$\phi'(t)^2\leqslant 4\phi(t)\|u_t\|^2 \tag{11}$$

由引理1和引理3,可得

$$\phi''(t)=(p+4)\|u_t\|^2+p(\|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2)-2(p+2)E(0)>2(p+2)(d-E(0))\geqslant 0,\quad\forall t\in(0,\infty) \tag{12}$$

(12)式两边积分得

$$\phi'(t)>\phi'(0)+2(p+2)(d-E(0))\geqslant 0,\quad\forall t\in(0,\infty)$$

这说明存在 $t_1>0$,使得对任意的 $t\in[t_1,\infty)$,$\phi'(t)>0$,从而 $\phi(t)=\|u\|^2$ 在 $[t,\infty)$ 不为零。另一方面,由(11)和(12)得 $\phi(t)\phi''(t)-(1+\frac{p}{4})\phi'^2(t)>0$,由 Levine 凸性引理[12],存在 $T_1\in\left(t_1,t_1+\frac{4\phi(t_1)}{p\phi'(t_1)}\right)$,使得 $\lim\limits_{t\to T_1}\phi(t)=+\infty$,这与 $T_0=\infty$ 矛盾。　　证毕

参考文献:

[1] Lianjun A, Peirce A. A weakly nonlinear analysis of elasto-plastic-microstructure models[J]. SIAM J Appl Math, 1995, 55:136-155.

[2] Chen G, Yang Z. Existence and nonexistence of global solutions for a class of nonlinear wave equations[J]. Math Methods Appl Sci, 2000, 23:615-631.

[3] Yang Z. Cauchy problem for a class of nonlinear dispersive wave equations arising in elasto-plastic flow[J]. J Math Anal Appl, 2006, 313:197-217.

[4] Liu Y. On potential well and vacuum isolating of solutions for semilinear wave equations[J]. J Diff Equn, 2003, 192: 109-127.

[5] Esquivel-avila J A. The dynamics of a nonlinear wave equation[J]. J Math Anal Appl, 2003, 279: 135-150.

[6] 赵军生,柳洪志. 非线性 Klien-Gordon 方程柯西问题解的整体存在性与 Blow-up[J]. 数学学报:中文版, 2008, 51(4): 711-720.

[7] Wang S, Xue H. Globalsolution for ageneralized Boussinesqequation[J]. Appl Mathand Comp, 2008, 204: 130-136.

[8] Wang S, Xu G. The cauchy problem for the rosenau equation [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71: 456-466.

[9] Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations[J]. Irseal J Math, 1975, 22: 273-303.

[10] Sattinger D H. On global solution of nonlinear hyperbolic equations[J]. Arch Rat Mech Anal, 1968, 30: 148-172.

[11] Liu Y, Xu R. Potential wells method for cauchy problem of generalized double dispersion equations[J]. J Math Anal Appl, 2008, 338: 1169-1187.

[12] Levine H A. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear equations[J]. SIAM J Math Anal, 1974, 5: 138-146.

Cauchy Problem for a Class of Nonlinear Wave Equation

WANG Yun-qing[1], *FENG Gai-hong*[2], *LI Mei-ling*[1]

(1. College of Longqiao, Lanzhou Commercial College, Lanzhou 730101;

2. College of Shengda Economics Trade & Management, Zhengzhou University, Zhengzhou 451191, China)

Abstract: This paper considers the existence and uniqueness of the solution for the Cauchy problem of the nonlinear wave equation $u_{tt}+u_{xxxx}+\lambda u=\sigma(u_x)_x$, $\lambda>0$. For $\sigma(u_x)_x=-\beta(|u_x|^p u_x)_x$, $\beta>0$, $p>0$, we define the stable set (potential well) W and unstable set V respectively by $W=\{u\in H^2(\mathbb{R})\mid \|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2<\frac{2(p+2)}{p}d\}$ and $V=\{u\in H^2(\mathbb{R})\mid \|u_{xx}\|^2+\lambda\|u\|^2>\frac{2(p+2)}{p}d\}$, moreover, we show the invariance of the set W and V under the flow of the problem. In addition, we prove the existence and uniqueness of the global solution to the problem as the initial value $u_0\in\overline{W}$ and blow-up in finite time $T_1\in\left(t_1, t_1+\frac{4\phi(t_1)}{p\phi'(t_1)}\right)$ as the initial value $u_0\in V$ if the initial energy $E(0)\leqslant d$.

Key words: nonlinear wave equation; Cauchy problem; potential well; global solution; blow-up

(责任编辑 欧红叶)