超可解群的一些充分条件*

史东风，曹洪平
(西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

摘要:主要讨论了群 G 的 Sylow 子群及其他子群的弱拟正规性对群的影响,从而得到原群 G 超可解的几个充分条件的定理:1) 群 G 有指数为素数的可解正规子群 H,若 H 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中弱拟正规,则 G 超可解;2) 群 G 有指数为素数的正规子群 H,若 H 的 Sylow 子群及 Sylow 子群的 2-极大子群皆在 G 内弱拟正规,则 G 超可解;3) 设 $G=AB$,A 超可解,B 是 P-群,$p=\max\pi(G)$,若 B 与 A 的极大子群可交换且 A 弱拟正规于 G,则 G 超可解;4) M 为 G 的幂零极大子群,若 M 及其极大子群皆在 G 中弱拟正规,则 G 超可解。

关键词:弱拟正规;极大子群;超可解
中图分类号:O152.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)01-0045-04

关于群的超可解性，前人已经做了大量的研究，并且用子群的弱拟正规性来讨论群的超可解也已得出许多结论[1-9]。本文在此基础上，利用子群的弱拟正规性对群的超可解进行了进一步的探讨，对文献[1,3]中的结论进行了推广,得到了群 G 超可解的几个充分条件。

1 预备知识

定义 1[1] 群 G 的子群 H 称为在 G 中弱拟正规，如果对 G 的任意子群 K,至少存在一个 K 的共轭子群 K^x，$x\in G$，使得 $HK^x=KH^x$。

引理 1[1] 若 H 在 G 中弱拟正规，则

1) 任 $N\lhd G$，HN 在 G 中弱拟正规，那么 HN/N 在 G/N 中弱拟正规；

2) 任 $x\in G$，H^x 在 G 中弱拟正规；

3) 任 $K\leqslant G$,K 与 H 的某共轭子群乘积可换。

引理 2[2] 设 N 是 G 的子群，K 是 G 的正规子群,M_1/K 为 NK/K 的极大子群，则存在 N 的一个极大 N_1，使得 $M_1/K=N_1K/K$。

推论 设 N 是 G 的子群，K 是 G 的正规子群，M_2/K 为 NK/K 的 2-极大子群，则存在 N 的一个 2-极大子群 N_2 使得 $M_2/K=N_2K/K$。

引理 3[1] 若 G 有两个子群 M 和 K，使得 $G=MK$，则任 $x,y\in G$,$G=M^xK^y$。

引理 4[4] 设 G 是可解外超可解群，则有 $G=F(G)M$ 且 $F(G)$ 为 G 的唯一极小正规子群，$|F(G)|=p\alpha$,$\alpha>1$,$F(G)\cap M=1$，M 为 G 的超可解的极大子群。

引理 5 设 G 可解，若 G 的 Sylow 子群的极大子群弱拟正规于 G，则 G 超可解。

证明 设 $K\lhd G$,$\bar{S}$ 是 NK/K 的 Sylow 子群，易知有 G 的 Sylow 子群 S，使得 $\bar{S}=SK/K$，从而由引理 2 和引理 1 知，定理条件是商群闭的。设 G 为极小阶反例，则 G 为可解外超可解群，$G=MF(G)$,$M\cap F(G)=1$，$|F(G)|=p^{\alpha}$,$\alpha>1$。

令 M_{p_1},M_{p_2},…,M_{p_n} 为 M 的一组 Sylow 基，不妨设 $p_1=p$,显然 $M_{p_1}F(G)$ 为 G 的 P-Sylow 子群。令 S 为 $M_{p_1}F(G)$ 的包含的极大子群，令 $K=S\cap F(G)$ 易知 $S=KM_{p_1}$,$K<F(G)$，$K\lhd F(G)$,$K\lhd S$ 。

* 收稿日期:2008-04-29 修回日期:2008-10-20
资助项目:国家自然科学基金资助项目(No. 10771172)
作者简介:史东风,男,硕士研究生,研究方向为有限群;通讯作者:曹洪平,E-mail:caohp@swu.edu.cn。

若 $K=1$，则由 $S=M_{p_1}$ 的极大性知 $|F(G)|=p$，从而矛盾。

若 $K\neq 1$，则有 $S=KM_{p_1}$，$K\lhd S$，由于 $S\lessdot M_{p_1}F(G)$，则由题设条件知 S 弱拟正规于 G,于是 $i\geqslant 2$ 时，对 $M_{p_i}\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ 必有的某个共轭子群与 S 成群，于是有 $M_{p_i}^{g_i}S\leqslant G$,$g_i=m_is_i$,$m_i\in M$,$s_i\in F(G)$。

又因为 $M_{p_i}^{g_i}S\cap F(G)=S\cap F(G)=K$,由 $K\lhd F(G)$ 知 $K\lhd S$,$K\lhd M_{p_i}^{g_i}S$,从而 $KM_{p_i}^{g_i}=M_{p_i}^{g_i}K$ 成群,于是有 $M_{p_i}^{g_i}K\leqslant G$。又由 $K\lhd F(G)$,有 $M_{p_i}^{g_i}K\leqslant G$。因 M 超可解有 Sylow 塔,$M=M_{p_1}M_{p_i}^{m_i}\cdots M_{p_n}^{m_n}$,于是 MK 成群。考察群阶知 $M\lneqq MK\lneqq G$ 与 M 的极大性矛盾，故 G 超可解。 证毕

除特别说明外,本文的符号都是标准的[4-5]。

2 主要定理

定理1 群 G 有指数为素数的可解正规子群 H,若 H 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中弱拟正规，则 G 超可解。

证明 由于 H 的每个 Sylow 子群的极大子群在 G 中弱拟正规，则由引理5知 H 是超可解的。又因为 $H\lhd G$ 且 $|G/H|=p$(p 是素数)，所以 G/H 可解，从而 G 可解。

令 N 为 G 的极小正规子群，若 $N\nleqq H$,则 $G=HN$，令 $D=H\cap N$,则 $D\lhd H$ 且 $D\lhd N$,于是 $D<G$。由 N 的极小正规性知 $D=1$，这样由于 $|G/H|=p$(p 是素数)，所以 $|N|=p$，又因为 H 超可解 $G/N\simeq H$,则 G 超可解。故可设 G 的极小正规子群皆包含于 H，此时 G/N 也满足命题条件。令 G 为极小阶反例，则 G 为可解外超可解群，因此具有引理4的结构：$G=F(G)M$,$F(G)\cap M=1$，$|F(G)|=p^{\alpha}$,$\alpha>1$。

显然 $F(G)\leqslant H$ 且 $H=F(G)(M\cap H)$,设 H_p 是 H 的 P-Sylow 子群，则 $F(G)\leqslant H_p$ 且 $H_p=F(G)(M\cap H_p)$。再令 $P\lessdot H_p$ 且 $H_p\cap M\leqslant P$,则 $P=(F(G)\cap P)(M\cap H_p)$。由 P 在 G 中弱拟正规知，存在 $x\in G$ 使得 PM^x 成群。

又因为 $M^x\lessdot G$,故有 $M^x=PM^x$ 或 $PM^x=G$。若 $PM^x=G$，则 $PM=G$，即 $(P\cap F(G))M=G=F(G)M$，进一步 $F(G)\cap P=F(G)$,$P=F(G)(H_p\cap M)$,又由 $H_p=F(G)(H_p\cap M)$,则 $P=H_p$ 矛盾。故只有 $M^x=PM^x$，于是 $P\leqslant M^x$,又 $F(G)\cap M^x=1$,故 $F(G)\cap P=1$,使得 $P=M\cap H_p\lessdot H_p$。取 F 为 $F(G)$ 的极大子群，则存在 $y\in G$,使得 F^yP 成群，又由 $F^y\leqslant F(G)$,得 $P\leqslant PF^y\leqslant H_p$,进一步 $P=PF^y$ 或 $PF^y=H_p$。若 $PF^y=H_p$，则 $F^yP=H_p=F(G)P$，由 $F(G)\cap P=1$ 得 $F^y=F(G)$ 矛盾。

故有 $P=PF^y$,由 $F^y\leqslant P$ 得 $F^y=1$，$|F(G)|=p$ 矛盾。 证毕

注 如果一个群满足文献[1]中定理8的条件，则这个群一定满足此定理的条件，但反之不成立,即此定理将群的超可解性的判定范围给予了扩大，推广了定理8。

定理2 群 G 有指数为素数的正规子群 H，若 H 的 Sylow 子群及 Sylow 子群的2-极大子群皆在 G 内弱拟正规，则 G 超可解。

证明 由 H 的 Sylow 子群弱拟正规于 G 知,H 的 Sylow 子群也弱拟正规于 H,从而由文献[1]中定理2知 H 为超可解的,又因为 $|G/H|=p$(p 为素数),所以 G/H 可解,于是 G 可解。

令 N 为 G 的极小正规子群,若 $N<H$,则 $G=HN$。令 $D=H\cup N$,则 $D\lhd N$,$D\lhd H$,从而 $D\lhd G=HN$。由 N 的极小性知 $D=1$，从而 $|N|=p$,又由 $G/N\backsimeq H$ 和 H 超可解得,G 超可解。故可设 G 的极小正规子群皆包含于 H,此时 G/N 也满足命题条件。故令 G 为极小阶反例，则 G 为可解外超可解群,因此 G 有引理4的结构：$G=MF(G)$,$F(G)\cap M=1$,$|F(G)|=p^{\alpha}$，$\alpha>1$,M 为 G 的超可解极大子群。

显然有 $F(G)\leqslant H$,$H=F(G)(H\cap M)$。令 H_p 为 H 的 p-Sylow 子群，于是 $H_p=F(G)(H_p\cap M)$。取 H_1 为 H_p 的包含 $H_p\cap M$ 的极大子群，则 $H_1=(H_1\cap F(G))(H_p\cap M)$，显然 $H_1\cap F(G)\leqslant 1$。再取 H_2 为 H_1 的包含 $H_1\cap F(G)$ 的极大子群,则 H_2 为 H_p 的2-极大子群，且 $H_2\leqslant 1$。于是由题设条件知 H_2 在 G 中弱拟正规,从而存在 $x\in G$ 使得 H_2M^x 成群。

由 M^x 的极大性可知,要么 $H_2M^x=G$,要么 $H_2M^x=M^x$。若 $H_2M^x=G$,则由 $M\cap F(G)=1$,$F(G)\nleqq H_2$，知矛盾。若 $H_2M^x=M^x$,则得 $H_2<M^x$,这又与 $M\cap F(G)=1$ 矛盾,从而可得 G 超可解。

注　此定理与文献[1] 中定理 8 相比较，在群超可解的判定上又稍微容易了一些，定理 8 用了 Sylow 子群的极大子群，而此定理用的是 Sylow 子群的 2-极大子群，即对定理 8 进行了推广。

定理 3　设 $G = AB$，A 超可解，B 是 P-群，$p = \max \pi(G)$，若 B 与 A 的极大子群可交换且 A 弱拟正规于 G，则 G 超可解。

证明　令 $P_1 = \mathrm{Syl}_p(A)$，A_1 是 A 的一个 Hall p'-子群。因为 B 是 G 的 P-子群，故有 $P_0 \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 使得 $B \leqslant P_0$，由 Sylow 定理有 $g \in G$，使得 $P_1^g \leqslant P_0$，因为 $G = AB$，故有 $a \in A$，$b \in B$，$g = ab$。由于 A 超可解且 $p = \max \pi(G)$ 知 $P_1 \lhd A$，于是 $P_1^g = P_1^{ab} = P_1^b$，有 $P_1 \leqslant P_0^{b^{-1}}$。又因为 $B = B^{b^{-1}} \leqslant p_0^{b^{-1}}$，于是 $p_0^{b^{-1}}$ 同时包含 P_1 和 B。令 $P = p_0^{b^{-1}} \in \mathrm{Syl}_p(G)$，由假设有 $|G| = \dfrac{|A|\,|B|}{|A \cap B|} = \dfrac{|A_1|\,|P_1|\,|B|}{|P_1 \cap B|} = |A_1|\,|P_1B|$，故有 $\dfrac{|G|}{|P_1B|} = |A_1|$。所以 $P_1B \in \mathrm{Syl}_p(G)$，从而 $P = P_1B$。若 $P \ntriangleleft G$ 则有 $N_G(P) = N_G(P) \cap AB = N_G(P) \cap A_1P = (N_G(P) \cap A_1)P$ 和 $N_G(P) < G$。因为 B 同 $A = A_1P_1$ 的极大子群可交换，并且 $G = A_1(P_1B) = A_1P$，$P_1 \lhd A$，故有 A_1 的极大子群 M，使得 MP 为 G 的极大子群，并且 $N_G(P) \leqslant MP \leqslant (MP_1)B$，由 A_1 超可解，得 $|A_1 : M| = q \in \pi(G)$。但 $|G : N_G(P)| = |G : MP| \cdot |MP : N_G(P)|$，由 Sylow 定理知有非负整数 k，l 使得 $|G : N_G(P)| = kp + 1$，$|MP : N_G(P)| = l_p + 1$，又 $|G : MP| = |A_1 : M|$，故有 $kp + 1 = q(|p + 1)$，所以 $p \mid (q - 1)$，同 $p = \max \pi(G)$ 矛盾，所以 $P \lhd G$。再由 $G/P \backsimeq A_1$ 超可解知，G 有 Sylow 塔。

由于 G 的商群或是超可解的或满足引理条件，故若 $\Phi(G) \neq 1$ 或 G 有两个极小正规子群，则 G 超可解。因此可设 $\Phi(G) = 1$ 且 N 为 G 唯一的极小正规子群，由上知 G 有 Sylow 塔，于是由文献[4] 中主要引理 6.1 知 $N = P \in \mathrm{Syl}_p(G)$。若 $1 \neq P_1 \in \mathrm{Syl}_p(A)$，则由 A 是超可解，N 是 Able 知 $P_1 \lhd G$，再由 N 的极小正规性得 $P_1 = N$，于是 $G = AB = A$ 显然超可解。若 $P_1 = 1$，则 $N = B$，令 N_1 为 N 的极大子群，则由 A 的弱拟正规性知，存在 $x \in G$，使得 AN_1^x 成群。又由于 $N_1^x \leqslant N$，$P_1 = 1$ 知，$A \cap N = 1$，$A \leqslant AN_1 \leqslant G$，所以 $N_1^x \lhd AN_1^x$ 即 $N_1^x \lhd G$，由 N 的极小正规性可知 $N_1^x = 1$，于是 $|N| = p$，所以由 G/N 超可解得 G 也超可解。

定理 4　M 为 G 的幂零极大子群，若 M 及其极大子群皆在 G 中弱拟正规，则 G 超可解。

证明　先证 G 可解。

1）当存在 $H \lhd G$，使得 $H \leqslant M$ 时，由归纳假设得 G/H 可解，从而 G 可解。

2）当不存在这样的 H 时，M 是 G 的 Hall 子群。事实上任取素数 $q \mid |M|$，$M_q \in \mathrm{Syl}_q(M)$，则 M_q 在 G 中不正规。因 M 幂零，故 $M \leqslant N_G(M_q)$，而 M 为极大子群，所以 $M = N_G(M_q)$ 必有 $M_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，否则存在 $Gq \in \mathrm{Syl}_q(G)$，使得 $M_q \leqslant G_q$。从而

$$M_q < N_{Gq}(M_q) \leqslant N_G(M_q),N_{Gq}(M_q) = G_q \cap N_G(M_q) = G_q \cap M = M_q$$

矛盾，故 $M_q \in \mathrm{Syl}_q(G)$。由 q 的任意性可知，M 是 G 的 Hall 子群，又因 M 的弱拟正规性知，必有 $|G|$ 的素因子 p，使得不整除 $|M|$，故必存在 $G_p \in \mathrm{Syl}_p(G)$ 满足 $G = MG_p$，而 M 幂零，从而由文献[5] 知 G 可解. 由 M 的弱拟正规性和 M 为 Hall 子群知，取 G_p 的极大子群 P，则存在 $x \in G$ 使得 MP^x 成群，且 $M \cap P^x = 1$。又由 M 的极大性可知 $P^x = 1$，从而 $P = 1$，则 $|G_p| = p$ 即 $|G : M| = p$。

再证 G 超可解。

若有 G 的极小正规子群 N，使得 $1 \neq N \nleq M$，则有 $G = MN$ 且 $M \cap N = 1$，从而 $|N| = p$，于是由 $G/N \simeq M$ 超可解，可得 G 超可解。故 G 的所有极小正规子群都包含于 M，令 G 为极小阶反例时，易知 G/N 也满足命题条件，故 G 为可解外超可解群，所以 G 有引理 4 的结构 $G = AF(G)$，$A \cap F(G) = 1$，$|F(G)| = p^\alpha$，$\alpha > 1$。

显然 $F(G) \leqslant M$，取 M_1 为 M 的包含 $M \cap A$ 的极大子群。由 M 的幂零性知 $|M : M_1| = p$，$M_1 = (F(G) \cap M_1)(M \cap A)$ 且 $M_1 \cap F(G) \neq 1$。由题设知 M_1 在 G 中弱拟正规，所以存在 $y \in G$ 使得 M_1A^y 成群，$M_1A^y = (M \cap A)(F(G) \cap M_1)A^y$，因 $F(G) \cap A^y = 1$ 知，$A^y < (M \cap A)(F(G) \cap M_1)A^y < G$，与 A^y 的极大性矛盾，从而 G 超可解。　证毕

注　此定理是在文献[3] 引理 4 给出群可解判定的基础上，对其条件稍做改动，从而将其推广为群超可解的判定定理。

参考文献:

[1] 钱国华,朱平天. 超可解群的一些充分条件[J]. 南京师范大学学报,1998,21(1):15-18.
[2] 赵啸海. 超可解群的几个充分条件[J]. 广西大学学报,2001,26(2):137-139.
[3] 王秀荣,王品超. 有限群的 S-半正规[J]. 曲阜师范大学学报,2000,26(3):1-3.
[4] 陈重穆. 内外 ε 极小非 ε 群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.
[5] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 北京:科学出版社,1987.
[6] 梁林芳,王玉兰,郭琼琼. 子群的 F-s-补[J]. 西南大学学报(自然科学版),2007,29(9):14-19.
[7] 黎前修. 关于半正规的几类群[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),1993,18(3):265-268.
[8] 何承春,陈贵云,韩章家. 极大幂零子群的阶为素数幂的有限群[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(1):17-19.
[9] 晏燕雄,陈贵云,何立官. 最高阶元个数为 42 的有限群是可解群[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(3):63-65.

Some Sufficient Conditions for Supersoluability of Groups

SHI Dong-feng, CAO Hong-ping

(School of Mathematics and Statistics, Southwest China University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper we discuss the influence on an original finite group G when its Sylow subgroups and other subgroups are weakly quasi-normal, then we obtain some sufficient conditions for supersoluability of group G. 1) Suppose that H is a solvable normal dubgroup of G with its exponent being prime, if every Sylow maximal subgroup is weakly quasi-normal in G, then G is supersolvable. 2) Suppose that H is a solvable normal dubgroup of G with its exponent being prime, if every Sylow maximal subgroup and two-maximal subgroup are weakly quasi-normal in G, then G is supersolvable. 3) Suppose that $G=AB$, A is supersolvable and B is P- subgroup, $p=\max \pi(G)$. If the maximal subgroups of A and B change each other, and A is weakly quasi-normal in G, then G is supersolvable. 4) Suppose that M is a nilpotent maximal subgroup of G, if M and its maximal subgroup are weakly quasi-normal in G. Then G is supersolvable.

Key words: weakly quasi-normal; maximal subgroups; supersolvable

(责任编辑 黄 颖)