幂零群的若干充分条件*

李方方, 陈贵云
(西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要:在文献[1]的基础上,改变一些条件得出 G 为幂零群的若干充分条件。利用弱 C-正规,S-正规与弱左 Engle 元之间的关系获得了下面几个定理:①G 的每个素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元,如果 $2\in\Phi(G)$,G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 C-正规,则 G 是幂零群。②设 $N\lhd G$,G/N 幂零,$2\in\pi(G)$,若 N 的素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元,且 N 的每个 4 阶循环子群也在 G 中弱 C-正规,则 G 幂零。③如果 G 的每个素数阶元 x 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的弱左 Engle 元,并且 $\langle x\rangle$ 和 G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 C-正规,则 G 是幂零群。④G 的每个素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元;如果 $2\in\pi(G)$,G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中 S-正规,则 G 是幂零群。⑤如果 G 的每个素数阶元 x 为 $N_G(\langle x\rangle)$ 的弱左 Engle 元,并且 $\langle x\rangle$ 和 G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 S-正规,则 G 是幂零群。

关键词:弱 C-正规;弱左 Engle 元;幂零群
中图分类号:O152.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)01-0049-04

在有限群论中,利用有限群 G 的子群性质来研究群 G 的结构是一个许多人都非常感兴趣的课题[1-8]。子群的正规、次正规、S-(半)正规、S-拟正规等条件都与群 G 的幂零性和超可解性有密切的关系。文献[1]中给出"G 的每个素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元,如果 $2\in G$,G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中 S-半正规(付正规),则 G 是幂零群"。本文在文献[1]的基础上,改变一些条件得出 G 为幂零群的若干充分条件。本文所指的群 G 是有限群。

1 预备知识

定义 1[2] 设 $H\leqslant G$,称 H 为 G 的 S-正规子群,若存在 G 的次正规子群 K,使得 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_{SG}$,其中 H_{SG} 为表示 G 包含在 H 中的最大的次正规子群。

定义 2[1] 称群 G 的元素 x 为 G 中一个弱左 Engle 元,如果 y 是 G 中任一阶与 $|x|$ 互素的素数幂阶元,则总有自然数 n,使 $[x,\underbrace{y,y,\cdots,y}_{n}]=1$。

定义 3[5] 设 G 是有限群,称群 G 的一个子群 H 在 G 中弱 C-正规,若存在 G 的一个次正规子群 K,使 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_G$。

引理 1 1)设 $H\leqslant M\leqslant G$,H 是 G 的 S-正规(弱 C-正规)子群,则 H 也是 M 的 S-正规(弱 C-正规)子群。

2)设 $K\lhd G$,$K\leqslant H\leqslant G$,那么 H 是 G 的 S-正规(弱 C-正规)子群当且仅当 H/K 是 G/K 的 S-正规(弱 C-正规)子群。

引理 1 的证明参看文献[2]的引理 1 和文献[5]中的性质 1。

引理 2[2] 设 G 是有限群,若 G 的 p-子群 $P\lhd\lhd G$,则 $P\leqslant O_p(G)$(其中 $O_p(G)=\langle A\mid A\lhd G$ 且 A 为 p-子群$\rangle$ 为 G 的最大正规 p-子群)。

引理 3[3] 设 G 为内-幂零群,于是

1)G 的阶为 $p^\alpha q^\beta$,其中 p,q 为相异素数;

2)$G=PQ$,G 有正规 Sylow 子群,设为 p-Sylow 群 P,此时 G 的 q-Sylow 子群 Q 循环 $Q=\langle a\rangle$,但 Q 不正规

* 收稿日期:2008-05-26
资助项目:国家自然科学基金(No. 10771172)
作者简介:李方方,女,硕士研究生,研究方向为有限群;通讯作者:陈贵云,E-mail:gychen@swu.edu.cn。

于 G;

3)设 $c\in P$,于是 c 是 P 的一个生成元的充分必要条件是 c 与 a 不可换;

4)若 P 为交换群,则 P 为初等交换群;

5)当 $p\neq 2$ 时,$\exp(P)=p$;当 $p=2$ 时,$\exp(P)\leqslant 4$;

6)若 c 为 P 的一个生成元,则 $[c,a]=c^{-1}c^{a}$ 也是 P 的生成元;

7)设 N 是真含在 P 内的 G 的极大正规子群 $N=\Phi(P)=P'$,其中 $\Phi(P)$ 为 Frattini 的子群,P' 为 P 的导群 $Z(G)=\Phi(G)=\Phi(P)\times\Phi(Q)$;

8)$P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群。

证明 1)~7)由文献[2]即可知。

8)假设结论不成立,设 $P_1/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群,而 $P/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$,则 $P_1/\Phi(P)\leqslant P/\Phi(P)$,则 $\Phi(P)\lhd P_1\lhd P$,这与 $\Phi(P)$ 是含在 P 中的 G 的极大正规子群矛盾,故结论 8)成立。 证毕

引理 4[4] 设 G 是有限群,$a,b,c\in G$,则 $[a,b]^{c}=[a^{c},b^{c}]$。

推论 设 G 是有限群,$a,b,c\in G$,n 是自然数,则 $[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{n}]^{c}=[a^{c},\underbrace{b^{c},b^{c},\cdots,b^{c}}_{n}]$。

证明 当 $n=1$ 时,由引理 5 知命题显然成立。

当 $n=k-1$ 时,假设命题正确,则有 $[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{k-1}]^{c}=[a^{c},\underbrace{b^{c},b^{c},\cdots,b^{c}}_{k-1}]$。

当 $n=k$ 时,有

$$[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{k}]^{c}=[[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{k-1}],b]^{c}=[[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{k-1}]^{c},b^{c}]=[[a^{c},\underbrace{b^{c},b^{c},\cdots,b^{c}}_{k-1}],b^{c}]=[a^{c},\underbrace{b^{c},b^{c},\cdots,b^{c}}_{k}]$$

即 $[a,\underbrace{b,b,\cdots,b}_{k}]^{c}=[a^{c},\underbrace{b^{c},b^{c},\cdots,b^{c}}_{k}]$,由此可知结论成立。 证毕

2 主要结果

定理 1 G 的每个素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元 如果 $2\in\Phi(G)$,G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 C-正规,则 G 是幂零群。

证明 假设定理不成立,G 是极小反例。

定理条件显然是子群闭的。由 G 是极小反例知 G 是内幂零群,由引理 3 知 $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$,$p\neq q$,$G=PQ$,$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$,$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G。

若 $p>2$,则由引理 3 知 $\exp(P)=p$,P 有 p 阶生成元 c。由定理条件知,c 为 G 的弱左 Engle 元,即可得自然数 n,使 $[c,\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n}]=1$ 由引理 3 知 $[c,a]$ 仍是 P 的生成元,产生矛盾。若 P 交换,则由引理 3 知 P 是初等交换群,同上知矛盾。所以 $p=2$,P 不交换。

故 P 有 4 阶生成元 c。由 $\langle c\rangle$ 在 G 中弱 C-正规,所以存在 $K\lhd\lhd G$,使 $G=\langle c\rangle K$,$K\cap\langle c\rangle\leqslant\langle c\rangle_G$。任取 G 的包含 K 的次正规群列(S):$1=K_0\leqslant K_1\leqslant\cdots\leqslant K\leqslant\cdots\leqslant K_{s-1}\leqslant K_s=G$,令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\lhd\lhd G$,由引理 2 知 $P_1\leqslant O_p(G)$,又由引理 3 知 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap\langle c\rangle K=\langle c\rangle P_1=\langle c\rangle$,这与 P 不交换产生矛盾。

故极小反例不存在,所以定理成立。 证毕

推论 1 G 的每个素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元 如果 $2\in\pi(G)$,G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中 S-正规,则 G 是幂零群。

证明 假设定理不成立,G 是极小反例。

定理条件显然是子群闭的。由 G 是极小反例知 G 是内幂零群。由引理 3 知 $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$,$p\neq q$,$G=PQ$,$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$,$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G。

若 $p>2$,则由引理 3 知 $\exp(P)=p$,P 有 p 阶生成元 c。由定理条件知,c 为 G 的弱左 Engle 元,即可得自然数 n,使 $[c,\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n}]=1$。由引理 3 知 $[c,a]$ 仍是 P 的生成元,产生矛盾。若 P 交换,则由引理 3 知 P 是初等交换群,同上知矛盾。所以 $p=2$,P 不交换。

故 P 有 4 阶生成元 c。由$\langle c\rangle$在 G 中 S-正规,所以存在 $K\lhd\lhd G$,使 $G=\langle c\rangle K$,$H\cap\langle K\rangle\leqslant\langle H\rangle_{SG}$。任取 G 的包含 K 的次正规群列(S):$1=K_0\leqslant K_1\leqslant\cdots\leqslant K\leqslant\cdots K_{s-1}\leqslant K_s=G$,令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\lhd\lhd G$,由引理 2 知 $P_1\leqslant O_p(G)$,又由引理 3 知 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap\langle c\rangle K=\langle c\rangle P_1=\langle c\rangle$。这与 P 不交换产生矛盾,故极小反例不存在,所以定理成立。　　证毕

定理 2　设 $N\lhd G$,G/N 幂零,$2\in\pi(G)$,若 N 的素数阶元均为 G 的弱左 Engle 元,且 N 的每个 4 阶循环子群也在 G 中弱 C-正规,则 G 幂零。

证明　假设定理不成立,G 是极小反例。

定理条件显然是子群闭的,由 G 是极小反例知 G 为内幂零群。由引理 3 知 $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$,$p\neq q$,$G=PQ$,$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$,$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,$Q=\langle a\rangle$不正规于 G。

1)若 $P\nleqslant N$,则 $P_1=P\cap N<P$,而 $P_1\lhd G$,从而$(P\cap N)Q=P_1Q<PQ=G$。于是 P_1Q 为幂零群。所以 $P_1Q=P_1\times Q$,又 $G/P_1=\{P/P_1\}\{QP_1/P_1\}$,$QP_1/P_1\in\mathrm{Syl}_q(G/P_1)$为幂零。由 G/P 及 G/N 幂零,知 G/P_1 幂零,所以 $QP_1/P_1\lhd G/P_1$。所以 $Q\,char\,QP_1\lhd G$,从而 $Q\lhd G$。与引理 3 中 Q 不正规于 G 矛盾,所以 $P\leqslant N$。

2)若 $p>2$,则由引理 3 知 $\exp(P)=p$,P 有 p 阶生成元 c。由定理条件知,c 为 G 的弱左 Engle 元,即可得自然数 n,使$[c,\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n}]=1$。由引理 3 知$[c,a]$仍是 P 的生成元,产生矛盾,所以 $p=2$。若 P 交换,则由引理 3 知 P 是初等交换群,同上知矛盾。所以 $p=2$,P 不交换。

3)若 $N=P$,由 2)和题中的条件知,P 有 4 阶生成元 c 且$\langle c\rangle$在 G 弱 C-正规,所以有$\langle c\rangle$在 G 中弱 C-正规。所以存在 $K\lhd\lhd G$,使 $G=\langle c\rangle K$,$H\cap K\leqslant H_G$。任取 G 的包含 K 的次正规群列(S):$1=K_0\leqslant K_1\leqslant\cdots\leqslant K\leqslant\cdots\leqslant K_{s-1}\leqslant K_s=G$。令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\lhd\lhd G$,由引理 2 知 $P_1\leqslant O_p(G)$,又由引理 3 知 $P_1\leqslant\Phi(P)$,又由引理 3 知 $P=P\cap G=P\cap\langle c\rangle K=\langle c\rangle P_1=\langle c\rangle$,这与 P 不交换产生矛盾,所以 $P<N$。

4)设 $b\in N$,$|b|=p$,由引理 3 知 G 的 Sylow-q 子群都循环,故 G 的 Sylow-q 子群的 q 阶元都共轭,所以对任意 $g\in G$ 有 b^g 肯定是 G 的某个 Sylow-q 子群的 q 阶元。由 $P\lhd G$ 知对任意 $c\in P$,$g\in G$,有 $c^g\in P$。由题中条件知 b 为 G 的弱左 Engle 元,即存在自然数 n,使$[b,\underbrace{c,c,\cdots,c}_{n}]=1$,而由引理 4 知

$$[b^g,\underbrace{c^g,c^g,\cdots,c^g}_{n}]=[b,\underbrace{c,c,\cdots,c}_{n}]^g=g^{-1}[b,\underbrace{c,c,\cdots,c}_{n}]g=g^{-1}g=1$$

由此可知,G 的所有 q 阶元都为 G 的弱左 Engle 元。

5)若 $p=2$,由 $P\lhd G$,知 G 的 2 阶元及 4 阶元均在 P 内,又由 1)知它们也均在 N 内。这样由定理条件知 G 的 2 阶元及 4 阶元均为 G 的弱左 Engle 元,而 4 阶循环子群在 G 中弱 C-正规,则由 4)和定理 1 知 G 为幂零群,产生矛盾。

故极小反例不存在,所以定理成立。　　证毕

推论 2　设 $N\lhd G$,G/N 幂零,$2\in\pi(G)$,若 N 的素数阶子群均为 G 的弱左 Engle 元,且 N 的每个 4 阶循环子群也在 G 中 S-正规,则 G 幂零。

证明　可仿照推论 1 和定理 2 的证明。

定理 3　如果 G 的每个素数阶元 x 为 $N_G(\langle x\rangle)$的弱左 Engle 元,并且$\langle x\rangle$和 G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 C-正规,则 G 是幂零群。

证明　假设定理不成立,G 是极小反例。

定理条件显然是子群闭的。由 G 是极小反例知 G 是内幂零群。由引理 3 知 $|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$,$G=PQ$,$P\in\mathrm{Syl}_p(G)$,$Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,$Q=\langle a\rangle$不正规于 G。

若 $p>2$,则由引理 3 知 $\exp(P)=p$,P 有 p 阶生成元 c。由定理条件知,$\langle c\rangle$在 G 中弱 C-正规。则存在 $K\lhd\lhd G$,使 $G=\langle c\rangle K$,$K\cap\langle c\rangle\leqslant\langle c\rangle_G$。任取 G 的包含 K 的次正规群列(S):$1=K_0\leqslant K_1\leqslant\cdots\leqslant K\leqslant\cdots\leqslant K_{s-1}\leqslant K_s=G$,令 $P_1=P\cap K$,则 $P_1\lhd\lhd G$,由引理 2 知 $P_1\leqslant O_p(G)$,所以 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap\langle c\rangle K=\langle c\rangle P_1=\langle c\rangle$。所以$\langle c\rangle Q=G$。于是有 $Q\leqslant N_G(\langle c\rangle)$,又 c 为 $N_G(\langle c\rangle)$的弱左 Engle 元。故有自然数 n,使$[c,\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n}]=1$。由引理 3 知$[c,a]$仍是 P 的生成元,产生矛盾。所以 $p=2$,若 P 交换,则由引理 3 知 P 是初

等交换群。同上知矛盾。所以 $p=2$,P 不交换。由 G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 C-正规,P 有 4 阶生成元 c,由定理条件知,$\langle c\rangle$ 在 G 中弱 C-正规。则存在 $K'\lhd\lhd G$,使 $G=\langle c\rangle K'$,$K'\cap\langle c\rangle\leqslant\langle c\rangle_G$。任取 G 的包含 K' 的次正规群列(S):$1=K'_0\leqslant K'_1\leqslant\cdots\leqslant K'\leqslant\cdots\leqslant K'_{s-1}\leqslant K'_s=G$。令 $P_1=P\cap K'$,则 $P_1\lhd\lhd G$,由引理 2 知 $P_1\leqslant O_p(G)$,所以 $P_1\leqslant\Phi(P)$,则 $P=P\cap G=P\cap\langle c\rangle K'=\langle c\rangle P=\langle c\rangle$,这与 P 不交换矛盾。 证毕

推论 3 如果 G 的每个素数阶元 x 为 $N_G(\langle c\rangle)$ 的弱左 Engle 元,并且 $\langle x\rangle$ 和 G 的每个 4 阶循环子群均在 G 中弱 S-正规,则 G 是幂零群。

证明 可仿照推论 1 和定理 3 的证明。

参考文献:

[1] 王坤任. 极小子群与幂零性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),1995(2):16-20.

[2] 胡滨,郭文彬. S-正规群及其性质[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2003,6(2):5-7.

[3] 陈重穆. 内外 ε-群与极小非 ε 群[M]. 重庆:西南师范大学出版社,1988.

[4] 徐明耀. 有限群导引(上)[M]. 北京:科学出版社,2001.

[5] 薛瑞,王品超. 有限群超可解的若干充分条件[J]. 扬州大学学报,2005,8(4):9-11.

[6] 张勤海,赵俊英. 幂零群的若干等价条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2005,30(1):26-30.

[7] 何承春,陈贵云,韩章家. 极大幂零子群的阶为素数幂的有限群[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(1):17-19.

[8] 刘学质. 用幂零指数的分布规律求 Jordan 基[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2005,30(6):5-8.

Some Sufficient Conditions of a Nilpotent Group

LI Fang-fang, *CHEN Gui-yun*

(School of Mathematics and Statistics, Southwest China University, Chongqing 400715, China)

Abstract: The author discusses this topic and obtain some theorems by using the relation between weakly C-normality of subgroups and weakly left Engle element in a finite group. ①suppose that x is a weak left Engle element for every element x of G with prime order, $2\in\Phi(G)$, if $\langle x\rangle$ is weak C-normal in G for every element x of G with order 4. Then G is nilpotent. ②suppose that $N\lhd G$, G/N G is nilpotent, $2\in\pi(\mathrm{G})$. If x is a weak left Engle element for every element x of N with prime order, and $\langle x\rangle$ is weak C-normal in G for every element x of N with order 4. Then G is nilpotent. ③Let G be a finite group. Suppose that every element x of G with a prime order p is a weakly left Engle element of, all cyclic subgroups of G with order 4 and $\langle x\rangle$ are weakly C-normal in G. Then G is nilpotent. ④suppose that x is a weak left Engle element for every element x of G with prime order, $2\in\Phi(G)$, if $\langle x\rangle$ is weak S-normal in G for every element x of G with order 4. Then G is nilpotent. ⑤Let G be a finite group. Suppose that every element x of G with a prime order p is a weakly left Engle element of G, all cyclic subgroups of G with order 4 and $\langle x\rangle$ are weakly S-normal in G. Then G is nilpotent.

Key words: weakly C-normality; weakly left Engle element; nilpotent groups

(责任编辑 黄 颖)