变时滞的 Hopfield 网络模型的全局指数稳定性*

董 彪[1],蒲志林[2]

(1. 阿坝师范高等专科学校,四川 汶川 623000;2. 四川师范大学 数学与软件学院,成都 610066)

摘要:研究了其时滞是在更一般的时间变量的函数情况下的 Hopfield 网络系统:$\dot{x}_i(t) = -c_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j(t))) + I_i, i = 1,2,\cdots,n$。在非线性神经激励函数满足较弱的 Lipschitz 条件下,引入 Lyapunov 函数,利用不等式技巧和泛函的单调性等,研究了具有变时滞的 Hopfield 网络系统的稳定性,得到了对每一个输出响应函数 $f_j(\cdot)$ 在 R 上有定义,且连续的情况下,系统有唯一的平衡点 $X = X^*$,并且该平衡点是全局指数稳定的一个易于判定的充分条件。

关键词:变时滞;Hopfield 网络;全局指数稳定

中图分类号:O241.81 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)01-0053-04

1988 年,L. O. Chua 等在文献[1]中提出了如下细胞神经网络

$$c_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_i}x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j + I_i, i = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中 $f_j(x_j) = \frac{1}{2}\| x_j(t) + 1| - |x_j(t) - 1\|, 1 \leqslant j \leqslant n, c_i > 0, R_i > 0$,分别表示电容、电阻,$x_i$ 表示电压,I_i 表示电流,u_j 表示输入电压,$|u_j| \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,n$。文献[2] 研究了(1) 式的全局指数稳定性。

由于物理实验上电路器件的影响,在系统动力学方程中,就要考虑时间滞后的影响。因此,文献[3] 研究了具有时滞 τ_j 的细胞神经网络模型

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -c_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j)) + I_i, i = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$

其中 $n \geqslant 2$ 是神经网络中神经元的个数,$x_i(t)$ 代表第 i 个神经元在 t 时刻的状态,c_i, a_{ij}, b_{ij} 及 I_i 是常数,$c_i > 0$,$f_j(\cdot)$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是非线性的激励函数,时滞 $\tau_j \geqslant 0$ 是常数。对此模型,已有广泛研究[2-7]。

本文将研究下面的模型,考虑其时滞是更一般的时间变量的函数情况下,在非线性神经元激励函数满足较弱的 Lipschitz 条件下,得到了其平衡点是全局指数稳定的一个易于判断的条件,考虑含有变时滞的细胞神经网络模型如下。

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -c_ix_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j(x_j(t-\tau_j(t))) + I_i, i = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

其中 $\tau_j(t)$ 满足 $0 < \tau_j(t) \leqslant \tau$(常数),$\tau'_j < 0$,并且赋予初始条件,$u_i(s) = \varphi_i(s), s \in [-\tau, 0]$。

1 预备知识

定义 1 称 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$ 是系统(3) 的平衡点,如果有

$$-c_ix_i^* + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}f_j(x_j^*) + I_i = 0, i = 1,2,\cdots,n$$

定义 2 一个函数 g 称为在实直线 R 是满足 Lipschitz 条件的,如果存在一个常数 K,使得 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,

* 收稿日期:2008-01-06 修回日期:2008-09-09

资助项目:四川省教育厅自然科学科研基金项目(No. 2006C056);阿坝师专校级重点课题(No. ASA07-10)

作者简介:董彪,男,副教授,研究方向为常微分方程稳定性;通讯作者:蒲志林,E-mail:puzhilin908@sina.com。

有 $|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|$,称常数 K 是函数 g 的 Lipschitz 常数,如果

$$K=\inf\{\partial\in\mathbf{R}^+:|g(x_1)-g(x_2)|\}\leqslant\partial|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}$$

定义3 设 $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是系统(3)的一个特解,系统(3)被称为全局指数收敛的。如果存在常数 $\sigma>0$,及 $M\geqslant1$,使得对系统(3)的任意解 $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}$,都有

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant M\|U-V\|\mathrm{e}^{-\delta t}$$

其中 $\|u-v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^n(u_i-v_i)^2}$,$\|U-V\|=\sqrt{\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\sum_{i=1}^n(u_i(\theta)-v_i(\theta))^2}$。

定义4 称系统(3)的一个平衡点 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 是全局指数稳定的,如果系统(3)全局指数收敛于 u^* 的。

2 主要结果及证明

定理1 在系统(3)中,如果每一个输出响应函数 $f_j(\cdot)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,并且连续,则该系统至少有一个平衡点[8-9]。

定理2 如果每一个输出响应函数 $f_i(\cdot)$ 满足:

1) $f_j(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件,且 Lipschitz 常数是 $L_j(j=1,2,\cdots,n)$;

2) $$\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|+|b_{ij}|)L_j+\sum_{j=1}^n(|a_{ji}|+|b_{ji}|)L_i<2c_i \tag{4}$$

则存在两个常数 $\varepsilon>0$ 和 $M\geqslant1$ 使得对于系统(3)的任何一对解 $u(t)$ 和 $v(t)$,对于 $\forall t\geqslant0$ 时,有

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant M\|U-V\|\mathrm{e}^{-\delta t}$$

证明 由(4)式,可得到充分小的 $\varepsilon>0$,使得

$$-c_i+\varepsilon<0,\text{且}-2c_i+2\varepsilon+\sum_{j=1}^n(|a_{ij}|L_j+|a_{ji}|L_i)+\sum_{j=1}^n(|b_{ij}|L_j+|b_{ji}|L_i\mathrm{e}^{2\varepsilon\tau})<0$$

$$(u_i(t)-v_i(t))'=-c_i(u_i(t)-v_i(t))+\sum_{j=1}^n a_{ij}(f_j(u_j(t))-f_j(v_j(t)))+$$
$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(f_j(u_j(t-\tau_j(t)))-f_j(v_j(t-\tau_j(t))))$$

作 Lyapunov 函数

$$W(t)=\sum_{i=1}^n[(u_i(t)-v_i(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}+\sum_{j=1}^n\int_{t-\tau_j(t)}^t L_j|b_{ij}|(u_j(s)-v_j(s))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon(s+\tau_j(t))}\mathrm{d}s]\geqslant0$$

$$\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{u_i(t)-v_i(t)}=\sum_{i=1}^n\{2(u_i(t)-v_i(t))(u_i(t)-v_i(t))'\mathrm{e}^{2\varepsilon t}+2\varepsilon(u_i(t)-v_i(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}+$$
$$\sum_{j=1}^n L_j|b_{ij}|[2\varepsilon\tau'_j(t)\mathrm{e}^{2\varepsilon t_j(t)}\int_{t-\tau_j(t)}^t(u_j(s)-v_j(s))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon s}\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{2\varepsilon\tau_j(t)}((u_i(t)-v_i(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}-$$
$$(1-\tau_j'(t))(u_i(t-\tau_j(t))-v_i(t-\tau_j(t)))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon(t-\tau_j(t))})]\}=$$
$$\sum_{i=1}^n\{2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}(u_i(t)-v_i(t))[-c_i(u_i(t)-v_i(t))+\sum_{j=1}^n a_{ij}(f_j(u_j(t))-f_j(v_j(t)))+$$
$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(f_j(u_j(t-\tau_j(t)))-f_j(v_j(t-\tau_j(t))))]+2\varepsilon(u_i(t)-v_i(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}+$$
$$\sum_{j=1}^n L_j|b_{ij}|[2\varepsilon\tau_j'(t)\mathrm{e}^{2\varepsilon t_j(t)}\int_{t-\tau_j(t)}^t(u_j(s)-v_j(s))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon s}\mathrm{d}s+$$
$$\mathrm{e}^{2\varepsilon\tau_j(t)}((u_j(t)-v_j(t))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon t}+(-1+\tau_j'(t))(u_j(t-\tau_j(t))-$$
$$v_j(t-\tau_j(t)))^2\mathrm{e}^{2\varepsilon(t-\tau_j(t))})]\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{2\varepsilon t}\{-(2c_i-2\varepsilon)(u_i(t)-v_i(t))^2+2\sum_{j=1}^n|a_{ij}||f_j(u_j(t))-f_j(v_j(t))||u_i(t)-v_i(t)|+$$

$$2\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||f_j(u_j(t-\tau_j(t)))-f_j(v_j(t-\tau_j(t)))||u_i(t)-v_i(t)|+$$

$$\sum_{j=1}^{n}L_j|b_{ij}|[(u_j(t)-v_j(t))^2e^{2\varepsilon\tau_j(t)}-(u_j(t-\tau_j(t))-v_j(t-\tau_j(t)))^2]\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}e^{2\varepsilon t}\{-(2c_i-2\varepsilon)(u_i(t)-v_i(t))^2+2\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j|u_j(t)-v_j(t)||u_i(t)-v_i(t)|+$$

$$2\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j|u_j(t-\tau_j(t))-v_j(t-\tau_j(t))||u_i(t)-v_i(t)|+\sum_{j=1}^{n}L_j|b_{ij}[(u_j(t)-v_j(t))^2e^{2\varepsilon\tau_j(t)}-$$

$$(u_j(t-\tau_j(t))-v_j(t-\tau_j(t)))^2]\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}e^{2\varepsilon t}\{-(2c_i-2\varepsilon)(u_i(t)-v_i(t))^2+$$

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j[u_i(t)-v_i(t))^2+(u_j(t)-v_j(t))^2]+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j[u_j(t-\tau_j(t))-v_j(t-\tau_j(t)))^2+$$

$$(u_i(t)-v_i(t))^2]+\sum_{j=1}^{n}L_j|b_{ij}|[u_j(t)-v_j(t))^2e^{2\varepsilon\tau}-(u_j(t-\tau_j(t))-v_j(t-\tau_j(t)))^2]\}=$$

$$-e^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}[(2c_i-2\varepsilon-\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j-\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j)(u_i(t)-v_i(t))^2-$$

$$(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L_j+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_je^{2\varepsilon\tau})(u_j(t)-v_j(t))^2]=-e^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n}[(2c_i-2\varepsilon-$$

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|L_j+|a_{ji}|L_i)-\sum_{j=1}^{n}(|b_{ij}|L_j+|b_{ji}|L_ie^{2\varepsilon\tau})](u_i(t)-v_i(t))^2\leqslant 0$$

即 $W(t)$ 在无穷区间$[0,+\infty)$上是单调递减的,从而

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{c_i\}\cdot\|u(t)-v(t)\|^2e^{2\varepsilon\tau}\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(u_i(t)-v_i(t))^2e^{2\varepsilon\tau}\leqslant W(t)\leqslant W(0)$$

而 $W(0)=\sum_{i=1}^{n}c_i(u_i(0)-v_i(0))^2e^{2\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau_j(0)}^{0}L_j|b_{ij}|(u_j(s)-v_j(s))^2e^{2\varepsilon(s+\tau_j(0))}ds=$

$$\sum_{i=1}^{n}c_i(u_i(0)-v_i(0))^2e^{2\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}L_j|b_{ij}|(u_j(\theta)-v_j(\theta))^2e^{2\varepsilon(\theta+\tau_j(0))}\tau_j(0)\leqslant$$

$$(c+L\tau e^{2\varepsilon\tau})\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\sum_{i=1}^{n}(u_i(\theta)-v_i(\theta))^2:=M\|U-V\|^2$$

其中 $-\tau_j(0)\leqslant\theta\leqslant 0$,$c=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{c_i\}$。

记 $L=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}L_j|b_{ij}|$,$M=\sqrt{(c+L\tau e^{2\varepsilon\tau})/\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{c_i\}}$,则

$$\|u(t)-v(t)\|\leqslant M\|U-V\|e^{-\delta t}$$

推论　在系统(3)中,如果每一个输出响应函数 $f_j(\cdot)$ 在 **R** 上有定义,并且连续,且满足

1) $f_j(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 Lipschitz 条件,且 Lipschitz 常数是 $L_j(j=1,2,\cdots,n)$;

2) $\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)L_j+\sum_{j=1}^{n}(|a_{ji}|+|b_{ji}|)L_i<2c_i$

则系统(3)有唯一的平衡点 $X=X^*$,并且该平衡点是全局指数稳定。

参考文献:

[1] Chua L O,Yang Y. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans Circuits Systems, 1988, 35(10): 1257-1272.
[2] 朱培勇,孙世新. Hopfield 网络的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用,2006,23(2):302-305.
[3] Cao J D. Periodic solutions and exponentioal stability in delayed cellular neural networks [J]. Phy Rev, 1999, 60(3): 3244-3248.
[4] Chua L O, Yang Y. Cellular neural networks: applications [J]. IEEE Trans Circuit Systems, 1988, 35(10): 1273-1290.
[5] Roska T, Chua L O. Cellular neuaral networks with nonlinear and delay-type template: internet [J]. J Circuit Theory Appl, 1992, 20(4): 469-481.

[6] 侯学刚. 时滞细胞神经网络模型的全局吸引性和指数稳定性[J]. 四川师范大学报(自然科学版),2002,25(4):358-361.
[7] 廖晓昕. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京:国防工业出版社,2000:339-134.
[8] 杨德刚. 一种新的时滞细胞神经网络全局渐近稳定性准则[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24(3):46-50.
[9] 彭世国. 变时延细胞神经网络模型的全局指数稳定性[J]. 工程数学学报,2002,19(2):131-387.

Global Exponential Stability in Variably Delayed Hopfield Neural Network Models

DONG Biao[1], *PU Zhi-lin*[2]
(1. Aba Teacher 's Collge, Wenchuan Sichuan 623000;
2. Collge of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: In the paper, delayed Hopfield network system: $\dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau_j(t))) + I_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, is studied. On condition that nonlinear neural active functions are Lipschitz, the stability of delayed Hopfield network is studied via the Lyapunov function and inequalities. It can be inferred that when each output response function $f_j(\cdot)$ has got a definition and a continuity on R, system 3 has got the sole stability $X = X^*$, and this stability is a sufficient condition for the global exponential stability.

Key words: variably time delay; Hopfield network; global exponential stability

(责任编辑 游中胜)