关于有限群的π-拟正规嵌入子群*

刘 熠[1],钟纯真,王坤仁[2],秦 亚[2]

(1. 内江师范学院 数学与信息科学学院,四川 内江 641112;2. 四川师范大学 数学与软件科学学院,成都 610068)

摘要:设 G 是有限群,称 G 的子群 H 在 G 中 π-拟正规嵌入,如果对于 $|H|$ 的每个素因子 p,H 的 Sylow p-子群也是 G 的某个 π-拟正规子群的 Sylow p-子群。利用极大(小)子群的 π-拟正规嵌入性,得到了如下包含超可解群类和幂零群系的饱和群系的充分条件。1)设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,且 N 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G/N\in\mathcal{F}$。如果 $F^*(N)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$ 中 π-拟正规嵌入,$F^*(N)$ 的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。2)设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{N}$的一饱和群系,且 H 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G/H\in\mathcal{F}$。如果 H 的极小子群或 4 阶循环子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。推广并加深了一些已知结果。

关键词:π-拟正规嵌入子群;极大(小)子群;超可解群系;饱和群系;超可解群;p-幂零群

中图分类号:O152.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2009)01-0057-04

本文里所有的群皆为有限群。

称 G 的子群 H 和 K 是可换的,如果 $HK=KH$。因此 H 和 K 是可换的当且仅当 $HK\leqslant G$。称 G 的子群 H 是 G 的 π-拟正规子群,如果对于 G 的任意 Sylow 子群 K,H 与 K 可换,即 $HK=KH$。文献[1]中提出了下面的定义,称 H 在 G 中 π-拟正规嵌入,如果对于 H 的每个素因子 p,H 的 Sylow p-子群也是 G 的某个 π-拟正规子群的 Sylow p-子群。显然 G 的每个 π-拟正规子群均为 G 的 π-拟正规嵌入子群,反之则不然,S_3 便是一个反例。设 $x\in G$,称 x 在 G 中 π-拟正规嵌入,如果$\langle x\rangle$在 π-拟正规嵌入。

设$\mathcal{F}$是一个群类。称$\mathcal{F}$是一个群系,如果满足 1)若 $G\in\mathcal{F}$且 $N\lhd G$,则 $G/N\in\mathcal{F}$;2)若 $G/N\in\mathcal{F}$且 $G/M\in\mathcal{F}$,则 $G/N\cap M\in\mathcal{F}$,其中 M,N 均是 G 的正规子群。一个群系$\mathcal{F}$是饱和的,如果 $G/\Phi(G)\in\mathcal{F}$,则 $G\in\mathcal{F}$。在本文中,$\mathcal{U}$和$\mathcal{N}_p$ 分别表示超可解群系和 p-幂零群系,显然$\mathcal{U}$和$\mathcal{N}_p$ 均是饱和的。

近几年来,许多学者都在 π-拟正规嵌入的条件下研究了有限群 G 的结构[2-10]。M. Asaad,A. A. Heliel 在文献[2]中证明了,设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,如果可解群 G 有一正规子群 H 使得 $G/H\in\mathcal{F}$ 且 $F(H)$的 Sylow 子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。去掉 G 的可解性是令人感兴趣的问题,李样明等人在文献[3]中做了这一工作。利用广义 Fitting 子群代替了 Fitting 子群,去掉了 G 的可解性的假设,获得了下面的定理,设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,如果有限群 G 有一个正规子群 N 使得 $G/N\in\mathcal{F}$,且 $F^*(N)$的任意 Sylow 子群的所有极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。本文进一步削弱上述定理条件,获得了下述定理。

设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,且 N 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G/N\in\mathcal{F}$。如果 $F^*(N)$的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$中 π-拟正规嵌入,$F^*(N)$的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。

利用子群的 π-拟正规性,文献[2]还得到了这样一个定理,设 G 是有限群,p 是整除 $|G|$ 的最小素因子。如果 G 的每个 Sylow p-子群的所有极大子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,则 G 是 p-幂零群。本文加深并推广了此结论,还对极小子群的 π-拟正规嵌入性作了一定的讨论,得到了两个包含超可解群类的饱和群系的充分条件。

* 收稿日期:2007-10-23 修回日期:2008-05-21
资助项目:四川省学术委员会和四川省教育厅重点学科建设基金(No. SZD0406)
作者简介:刘熠,男,讲师,研究方向为有限群。

1 初等结果

引理 1[2]　**假设 U 在 G 中 π-拟正规嵌入,$H\leqslant G$ 且 $K\lhd G$,则有**

1)如果 $U\leqslant H$,则 U 在 H 中 π-拟正规嵌入;

2)UK 在 G 中 π-拟正规嵌入且 $UK\square K$ 在 $G\square K$ 中 π-拟正规嵌入;

3)设 $K\leqslant H$ 且 $H\square K$ 在 $G\square K$ 中 π-拟正规嵌入,则 H 在 G 中 π-拟正规嵌入。

引理 2[6]　**设 P 是 G 的一正规 p-子群且 $H\lhd G$,则 $F(HP)=F(H)P$。**

引理 3　**设 $K\leqslant G$,N 是 G 的一正规子群。若 K 的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $NK\square N$ 的极大子群在 $G\square N$ 中 π-拟正规嵌入。**

证明　设 $M\square N$ 是 $NK\square N$ 的极大子群,则 M 是 NK 的极大子群且 $M=M\cap NK=N(M\cap K)$。设 K_1 是 K 的极大子群且 $M\cap K\leqslant K_1$,则 $N\cap K\leqslant K_1\cap N\leqslant N\cap K$,即 $N\cap K=K_1\cap N$。于是 $K_1N<NK$,但是 $M=N(M\cap K)\leqslant K_1N<NK$,由 M 是 NK 的极大子群可得 $M=K_1N$,由引理 1 有 $M\square N$ 在 $G\square N$ 中 π-拟正规嵌入。　　证毕

引理 4[7]　**设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,假设 G 有素数阶正规子群 N 使得 $G\square N\in\mathcal{F}$,则 $G\in\mathcal{F}$。**

引理 5[5]　**设 G 是有限群,则**

1)如果 $M\lhd G$,则 $F^*(M)\leqslant F^*(G)$;

2)$F^*(F^*(G))=F^*(G)\geqslant F(G)$ 若 $F^*(G)$是可解群,则 $F^*(G)=F(G)$。

引理 6[2]　**设 G 是有限群,p 是整除 $|G|$ 的最小素因子。如果 G 的每个 Sylow p-子群的所有极大子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,则 G 是 p-幂零群。**

引理 7[4]　**若$\mathcal{F}$是$f(p)$局部定义,则 $G\in\mathcal{F}$当且仅当**

1)$f(p)=\phi$ 时,p 不整除 $|G|$;

2)设 $H\square K$ 是 G 的一主因子,$P\Big|\,|H\square K|$,则 $G\Big/C_G(H\square K)\in f(p)$。

引理 8[4]　**令$\mathcal{F}_i=LF(F_i)$ $(i=1,2)$,其中 F_i 是局部定义群系$\mathcal{F}_i$ 的满的群系函数,则 1)$\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2$;2)$\mathcal{F}_1(p)\subseteq\mathcal{F}_2(p)$等价。**

引理 9　**设 P 是 G 的一极小正规 p-子群(p 是素数)。如果 P 的每个 p 阶子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 P 是 p 阶循环子群。**

证明　设 S 是 G 的一 Sylow p-子群,则 $P\cap Z(S)\neq 1$。设 L 是 $P\cap Z(S)$的 p 阶子群,由假设可知 L 在 G 中 π-拟正规嵌入。取 $q\neq p$ 且 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,因此存在 G 的 π-拟正规子群 K 使得 L 是 K 的一 Sylow p-子群,则 L 是 $KQ=QK$ 的 Sylow p-子群。又 $L=P\cap KQ$,因此 $L\lhd KQ$。从而 $LQ=QL$。因此有 $O^p(G)=\langle Q\mid Q\in\mathrm{Syl}_q(G),\forall q\neq p,q\in\pi(G)\rangle\leqslant N_G(L)$。

另一方面 $S\leqslant N_G(L)$,因此 $L\lhd G$。因为 P 是 G 的极小正规子群,从而 $P=L$。　　证毕

引理 10[8]　**设$\mathcal{F}$是一饱和群系,G 是有限群,$F(G)$为 G 的 Fitting 子群。如果 $G\notin\mathcal{F}$,但存在一个极大子群 M 使得 $M\notin\mathcal{F}$且 $G=MF(G)$。则 $G^{\mathcal{F}}\square(G^{\mathcal{F}})'$是 G 的$\mathcal{F}$-中心主因子。对于 $|G|$ 的某个素因子 p 而言,如 $p>2$,$\exp G^{\mathcal{F}}=p$ 若 $p=2$,$\exp G^{\mathcal{F}}\leqslant 4$。**

2 主要结果

定理 1　**设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,且 N 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G\square N\in\mathcal{F}$。如果 $F^*(N)$的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$中 π-拟正规嵌入,$F^*(N)$的 Sylow2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。**

证明　假设定理不成立,设 G 是极小阶反例。

1)$F^*(N)$是可解群且 $F^*(N)=F(N)$。由定理的假设有 $F^*(N)$的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,由引理 6 有 $F^*(N)$是 2-幂零群。由 Feit-Thompson 定理可知 $F^*(N)$是可解群。由引理 5 有 $F^*(N)=F(N)$,因而 $F^*(N)$的 Sylow 子群在 G 中正规。

2)最后的矛盾。

由 1)知道,对 $F^*(N)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q,均有 $N_G(Q)=G$,从而 $F^*(N)$ 的任意 Sylow 子群的所有极大子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,应用文献[3]的 定理 1.1,即有 $G\in\mathcal{F}$。与已知矛盾。故极小阶反例不存在,定理成立。　　证毕

推论 1　设 N 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G\square N$ 是超可解群。如果 $F^*(N)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$ 中 π-拟正规嵌入,$F^*(N)$ 的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 G 是超可解群。

推论 2　设 G 是有限群,如果 $F^*(G)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$ 中 π-拟正规嵌入,$F^*(G)$ 的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 G 是超可解群。

如果 N 是可解群,则有 $F^*(N)=F(N)$,于是由定理 1 容易得下面定理。

定理 2　设$\mathcal{F}$是包含超可解群类$\mathcal{U}$的一个饱和群系,且 N 是有限群 G 的一个可解正规子群使得 $G\square N\in\mathcal{F}$。如果 $F(N)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$ 中 π-拟正规嵌入,$F(N)$ 的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。

推论 3　设 N 是有限群 G 的一个可解正规子群使得 $G\square N$ 是超可解群。如果 $F^*(N)$ 的任意奇阶 Sylow 子群 Q 的所有极大子群均在 $N_G(Q)$ 中 π-拟正规嵌入,$F^*(N)$ 的 Sylow 2-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,则 G 是超可解群。

定理 3　假设 N 是有限群 G 的一个正规子群,且 p 是整除 $|G|$ 的最小素因子。设$\mathcal{F}$是包含 p-幂零群系 $\mathcal{N}_p$ 的一饱和群系,且 $G\square N\in\mathcal{F}$。如果 N 的一 Sylow p-子群的所有极大子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。

证明　由引理 6 可知 N 是 p-幂零群。假设 H 是 N 的一正规 Hall p'-子群,则 $H\lhd G$。又 $G\square N\cong G/H\Big/N/H\in\mathcal{F}_{-}$,$(N\square H)\lhd(G\square H)$。令 $PH\square H$ 是 $N\square H$ 的 Sylow 子群,$P_1H\square H$ 是 $PH\square H$ 的一极大子群,其中 P_1 是 P 的极大子群,$P\in\mathrm{Syl}_p(N)$。由假设 P_1 在 G 中 π-拟正规嵌入,故 $P_1H\square H$ 在 $G\square H$ 中 π-拟正规嵌入,从而由归纳知 $G\square H\in\mathcal{F}$。若 $H\neq 1$,则设 $F_i(i=1,2)$ 是局部定义群系 F_i 的满的群系函数使得$\mathcal{N}_p=LF(F_1)$且$\mathcal{F}=LF(F_2)$。由$\mathcal{N}_p\subseteq\mathcal{F}$,则由引理 8 知 $F_1(q)\subseteq F_2(q)$。若 $q\in\pi(K_1\square K_2)$,则 $G\Big/C_G(K_1\square K_2)\in F_1(q)$,其中 $K_1\square K_2$ 是 G 的主因子且 $K_1\leqslant H$,因此 $G\Big/C_G(K_1\square K_2)\in F_2(q)$。由引理 7 有 $G\in\mathcal{F}$。因此可假设 $H=1$,则 $N=P$ 是一 p 群。$\forall q\in\pi(G)$ 且 $p\neq q$,设 $Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$,显然 $PQ\leqslant G$。由假设和引理 6 可知 PQ 是 2-幂零群,因此 PQ 是幂零群,从而有 $PQ=P\times Q$。所以对于 G 的任意一主因子 $K_1\square K_2$ 且 $K_1\leqslant P$,可得 $G\Big/C_G(K_1\square K_2)$是一 p 群。再由引理 7 和引理 8 有 $G\in\mathcal{F}$。　　证毕

注 1　在该定理中‘p 是整除 $|G|$ 的最小素因子’的条件不能略去。例如,$G=A_5$ 且 $p=5$,则 G 的 Sylow 5-子群的极大子群是 1,显然 G 的 Sylow 5-子群的极大子群在 G 中 π-拟正规嵌入,但是 G 不是 5-幂零群。

注 2　该定理推广了文献[2]中定理 2.1。

定理 4　设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{N}$的一饱和群系,且 H 是有限群 G 的一个正规子群使得 $G\square H\in\mathcal{F}$。如果 H 的极小子群或 4 阶循环子群均在 G 中 π-拟正规嵌入,则 $G\in\mathcal{F}$。

证明　假设定理不成立,设 G 是一极小阶反例,则 $G\notin\mathcal{F}$且 $1\neq G^{\mathcal{F}}\leqslant H$。由文献[10]中定理 2.5 知 G 有一极大子群 M 使得 $G\square M_G\in\mathcal{F}$且 $G=M\widetilde{F}(G)$,其中$\widetilde{F}(G)=Soc(G\square\Phi(G))$。则有 $G=MC^{\mathcal{F}}=MH$ 且 $M\square M\cap H\in\mathcal{F}$。因 $M\cap H$ 的每个极小子群或 4 阶循环群在 G 中 π-拟正规嵌入,当然在 M 中 π-拟正规嵌入。从而 M 满足定理条件,由 G 的极小性有 $M\in\mathcal{F}$。

另一方面,由文献[3]定理 3.3 知 H 是超可解群。因此 $G^{\mathcal{F}}$是可解的,且 $G=MF(G)$。由引理 10,对于 $|G|$ 的某个素因子 p 而言,$G^{\mathcal{F}}$是 p-群。若 $p>2$,$\exp G^{\mathcal{F}}=p$ 若 $p=2$,$\exp G^{\mathcal{F}}\leqslant 4$ 并且 $G^{\mathcal{F}}\square(G^{\mathcal{F}})'$是 $G\square(G^{\mathcal{F}})'$ 的一极小正规子群。易知 $G^{\mathcal{F}}\square(G^{\mathcal{F}})'$的每个子群在 $G\square(G^{\mathcal{F}})'$中 π-拟正规嵌入。再由引理 9 有 $G^{\mathcal{F}}\square(G^{\mathcal{F}})'$ 是一素数阶循环群。又因为 $G^{\mathcal{F}}\square(G^{\mathcal{F}})'$是 G-同构于 $Soc(G\square M_G)$,从而 $G\square M_G$ 是超可解群,矛盾。极小阶反例 G 不存在,因此定理成立。　　证毕

作为定理 4 的应用,得到下述定理。

定理 5 设$\mathcal{F}$是包含$\mathcal{N}$的一饱和群系。假设 N 是有限群 G 的一具有 Sylow 塔的正规子群使得 $G/N\in\mathcal{F}$。如果的 N 每个 Sylow p-子群 P 的极小子群或 4 阶循环子群均在 $N_G(P)$ 中 π-拟正规嵌入，则 $G\in\mathcal{F}$。

证明 假设定理不成立，设 G 是极小阶反例。

在 G 的满足定理条件的所有正规子群中，选择其阶最小的正规子群 N 使得 $G/N\in\mathcal{F}$。由定理假设可知 N 具有 Sylow 塔。令 q 是 $|N|$ 的最大素因子且 $Q\in \mathrm{Syl}_q(N)$，则 $Q\lhd G$。考虑商群 G/Q，则有 $(N/Q)\lhd(G/Q)$ 且 N/Q 具有 Sylow 塔。因为 $(G/Q)\Big/(N/Q)\cong G/N$，则 $(G/Q)\Big/(N/Q)\in\mathcal{F}$。设 $R/Q\in \mathrm{Syl}_p(N/Q)$，$p\neq q$，则存在 N 的 Sylow p-子群 P 使得 $R=PQ$。设 $\langle x\rangle Q/Q$ 是 N/Q 的极小子群或 4 阶循环子群，其中 $\langle x\rangle\in P$，则 $\langle x\rangle$ 是 P 的极小子群或 4 阶循环子群。由定理假设可知 $\langle x\rangle$ 在 $N_G(P)$ 中 π-拟正规嵌入，从而 $\langle x\rangle Q/Q$ 在 $N_G(P)Q/Q=N_{G/Q}(R/Q)$ 中 π-拟正规嵌入。因此 G/Q 满足定理条件。由 G 的极小性有 $G/Q\in\mathcal{F}$。由 N 的极小性有 $N=Q$，从而 N 的每个极小子群及 4 阶循环子群在中 $N_G(Q)=G$ 中 π-拟正规嵌入。由定理 4 知 $G\in\mathcal{F}$，矛盾。 证毕

参考文献：

[1] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups[J]. J Pure and Algebra, 1998, 27: 113-118.

[2] Asaad M, Heliel A A. On S-quasinormality embedded subgroups of finite groups [J]. J Pure and Algebra, 2001, 165: 129-135.

[3] Li Y M, Wang Y M. On π-quasinormally embedded subgroups of finite groups [J]. J Algebra, 2004, 28(1): 109-123.

[4] Doerk K, Hawkes T. Finite solvable Groups [M]. Bernlin: Walter de Gruyter, 1992.

[5] Huppert B, Blackburn N. Finite Groups III[M]. Bernlin: Spring-Verlag, 1982.

[6] Asaad M, Ramada M, Shaalan A. Influence of π-quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroup of a finite group [J]. Arch Math, 1991, 56: 521-527.

[7] Li Y M, Wang Y M, Wei H Q. The influence of π-quasinormal subgroups of a finite group[J]. Arch Math, 2003, 8: 245-252.

[8] Ballester-Bolinches A. On minimal subgroup of a finite group [J]. Arch Math, 1996, 73: 335-342.

[9] Huppert B. Endliches Gruppen I[M]. Berlin: Springer, 1979.

[10] Ballester-Bolinches A. $\mathscr{H}$-normalizes and local definition of saturated formations of a finite group [J]. Israel J Math, 1989, 67: 312-326.

On π-quasinormally Embedded Subgroups of a Finite Group

LIU Yi[1], *ZHONG Chun-zhen*[1], *WANG Kun-ren*[2], *QIN Ya*[2]

(1. College of Mathematics and information science, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan 641112;
2. College of Mathematics and software science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: Let G be a finite group. A subgroup H of G is said to be π-quasinormally embedded in G, if for each prime divisor p of the order of H, a Sylow p-subgroup of H is also a Sylow p-subgroup of some π-quasinormal subgroup of G. In terms of the properties of π-quasinormally embedded of maximal or minimal subgroups, some sufficient conditions of a saturated formation containing the class of all finite supersolvable groups or nilpotent groups are obtained, 1) Let $\mathcal{F}$ be a satuated formation containing supersolvable formation $\mathcal{U}$ and N be a nomal subgroup of a finite group G such that $G/N\in\mathcal{F}$. If each maximal subgroup of any sylow subgroup of Q of $F^*(G)$ of odd order is π-quasinormally embedded in $N_G(Q)$ and each maximal subgroup of a sylow 2-π subgroup of $F^*(N)$ is π-quasinormally embedded in G, then $G\in\mathcal{F}$. 2) Let $\mathcal{F}$ be a satuated formation containing nilpotent formation $\mathcal{N}$ and H be a nomal subgroup of a finite group G such that $G/H\in\mathcal{F}$. If each minmal subgroup or cyclic subgroup of order 4 of H is π-quasinormally embedded in G, then $G\in\mathcal{F}$. And some known results are generalized and improved.

Key words: π-quasinormally embedded subgroup; maximal (minimal) subgroup; supersolvable formation; saturated formation; supersolvable group; p-nilpotent group

(责任编辑 黄 颖)