一类时滞积分微分方程的稳定性分析*

谢 新 怀
(重庆电力高等专科学校，重庆 400053)

摘要:讨论了一类具有离散时滞和无穷分布时滞的微分积分方程。利用分析技巧和 M-矩阵的性质,建立一个时滞微分积分不等式。在此基础上,获得时滞微分积分方程零解全局指数稳定的一个充分条件。最后,对方程的一些数学模型进行应用,获得新结果。假设 $V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$ 满足下列微积分不等式 $D^+V(t)=PV(t)+RV[V(t)]_\tau+\int_0^{+\infty}Q(s)V(t-s)\mathrm{d}s,t\geqslant t_0$,这里 $P=(P_{ij})_{n\times n},P_{ij}\geqslant 0(i\neq j),R=(r_{ij})_{n\times n},r_{ij}\geqslant 0,Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times n},q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+],\int_0^{+\infty}q_{ij}(s)\mathrm{d}s<+\infty,i,j=1,2,\cdots,n$。如果存在一个正向量 $z>0$ 使得 $-(P+R+\int_0^{+\infty}Q(s)\mathrm{d}s)z<0$,那么当 $V(s)\leqslant z,-\infty<s\leqslant t_0$ 时,有 $V(t)\leqslant z,t\geqslant t_0$,从而推广和改进了一些相关结论。

关键词:微分积分方程;时滞;全局指数稳定;M-矩阵
中图分类号:O175.13　文献标识码:A　文章编号:1672-6693(2009)01-0061-04

1 预备知识

在物理、化学、电子学、生物等领域,积分微分方程是描述时间演化系统的重要数学模型之一。由于在这些系统中,时间延迟现象是普遍存在的,因而具有时滞的积分微分方程及其实际模型近年来得到广泛关注,并获得不少研究成果[1-10],其中,文献[1,4-6]讨论了具有离散时滞系统的稳定性,文献[7-8]讨论了分布时滞系统的稳定性。显然,同时考虑具有离散时滞和分布时滞的微分方程(系统)更有普遍意义和研究价值。

本文考虑如下具有离散时滞和分布时滞的积分微分方程

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(t-r(t)))+\int_{-\infty}^{t}g(t-s,x(s))\mathrm{d}s,t\geqslant t_0 \tag{1}$$

其中 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}},A=(a_{ij})_{n\times n},f\in C[\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n],g\in C[\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$,且 $f(\cdot,0,0)=0,g(\cdot,0)=0$。

方程(1)的初始值问题由如下形式给定

$$x(t_0+s)=\varphi(s),\varphi\in C,-\infty\leqslant s\leqslant 0$$

通常记具有上述初始条件的解为 $x(t,t_0,\varphi)$ 或简记为 $x(t)$。显然,$x=0$ 是方程的平凡解。

定义 1　如果对方程(1)的任意解 $x(t,t_0,\phi),\phi\in C$,存在常量 $\lambda>0$ 和 $\kappa\geqslant 1$ 满足

$$\|x(t,t_0,\varphi)\|\leqslant\kappa\|\varphi\|\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},t\geqslant t_0$$

称方程(1)的零解为全局指数稳定的。

为了方便,全文采用如下记号。

$\mathbf{R}^n$ 为 n 维实向量空间,$\mathbf{R}_+^n\triangleq[0,\infty)\times[0,\infty)\times\cdots\times[0,\infty)$,$\mathbf{R}^{n\times m}$ 是 $n\times m$ 实矩阵空间,I 为适当维数的单位矩阵。$C[X,Y]$ 表示从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射,$C\triangleq C[(-\infty,t_0],\mathbf{R}^n]$。对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))^{\mathrm{T}}\in C$,记 $[x(t)]^+=(|x_1(t)|,|x_2(t)|,\cdots,|x_n(t)|)^{\mathrm{T}}$,$[\varphi(t)]_\tau^+=(\|\varphi_1(t)\|_\tau,\|\varphi_2(t)\|_\tau,\cdots,\|\varphi_n(t)\|_\tau)^{\mathrm{T}}$,$\mathrm{sgn}(x)=diag\{\mathrm{sgn}(x_1),\mathrm{sgn}(x_2),\cdots,\mathrm{sgn}(x_n)\}$,其中 τ

* 收稿日期:2008-09-09
作者简介:谢新怀,男,讲师,研究方向为微积分及微分方程。

$\leqslant\infty$。这里 $\operatorname{sgn}(x_i)=\begin{cases}-1, x_i<0\\0, x_i=0\\1, x_i>0\end{cases}$，$\|\varphi_i(t)\|_\tau=\sup\limits_{-\tau<s\leqslant 0}|\varphi_i(t+s)|$，$(i=1,2,\cdots,n)$。对于 $A,B\in\mathbf{R}^n$(或 $A,B\in\mathbf{R}^{n\times m}$)，$A\leqslant B(A<B)$ 表示 A,B 对应元素满足关系"$\leqslant$"("$<$")。特别地，A 被称作非负矩阵当 $A\geqslant 0$，对 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$，采用 $[A]^+=(|a_{ij}|)_{n\times n}$，$A^*=(a_{ij}^*)_{n\times n}$，$a_{ij}^*=\begin{cases}a_{ij}, i=j\\|a_{ij}|, i\neq j\end{cases}$ $A^*=(a^*)$。

定义 2[9] 矩阵 D 称为非奇异 M-矩阵(记作 $D\in M$)，如果 D 的主对角元素非负且存在正向量 $z=(z_1, z_2,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$ 使得 $Dz>0$ 或 $D^{\mathrm{T}}z>0$。

定义 3[1] 设 $V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$，称 $D^+V(t)=\overline{\lim\limits_{s\to 0^+}}\dfrac{V(t+s)-V(t)}{s}$ 为 $V(t)$ 的右上 Dini 导数。

2 主要结果

微分不等式是定性分析微分方程动态行为的重要工具之一，为了获得方程(1)的稳定性，首先给出一个时滞微分积分不等式结果。

定理 1 假设 $V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$ 满足下列微分积分不等式

$$D^+V(t)=PV(t)+RV[V(t)]_\tau+\int_0^\infty Q(s)V(t-s)\mathrm{d}s, t\geqslant t_0 \tag{2}$$

这里 $P=(p_{ij})_{n\times n}$，$p_{ij}\geqslant 0, i\neq j$，$R=(r_{ij})_{n\times n}$，$r_{ij}\geqslant 0$，$Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times n}$，$q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$，$\int_0^{+\infty}q_{ij}(s)\mathrm{d}s<+\infty$，$i,j=1,2,\cdots,n$。如果存在一个正向量 $z>0$ 使得

$$-(P+R+\int_0^{+\infty}Q(s)\mathrm{d}s)z<0 \tag{3}$$

那么当 $V(s)\leqslant z$，$-\infty<s\leqslant t_0$ 时，有 $V(t)\leqslant z$，$t\geqslant t_0$。

证明 对(2)式两边积分，得

$$V(t)\leqslant V(t_0)+\int_{t_0}^t[PV(\xi)+R[V(\xi)]_\tau+\int_0^{+\infty}Q(s)V(\xi-s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}\xi, t\geqslant t_0 \tag{4}$$

首先证明对任意 $\alpha>1$，当 $V(s)<\alpha z$，$-\infty<s\leqslant t_0$ 时有

$$V(t)<\alpha z, \text{对 } t\geqslant t_0 \tag{5}$$

否则，必存在某正整数 m 和某时刻 $t^*>t_0$ 使得

$$V_m(t^*)=\alpha z_m, V_m(t)\leqslant\alpha z_m, t<t^* \tag{6}$$

$$V(t)\leqslant\alpha z, t\leqslant t^* \tag{7}$$

记 $E_m=(\underbrace{0,\cdots,0,1}_{m},0,\cdots,0)$，利用(4)，(5)，(7)式可得

$$V_m(t^*)\leqslant E_m\{V(t_0)+\int_{t_0}^{t^*}[PV(\xi)+R[V(\xi)]_\tau+\int_0^{+\infty}Q(s)V(\xi-s)\mathrm{d}s]\mathrm{d}\xi\}<$$

$$E_m\{\alpha z+\int_{t_0}^{t^*}[P\alpha z+R\alpha z+\int_0^{+\infty}Q(s)\alpha z\mathrm{d}s]\mathrm{d}\tau\}=E_m\{\alpha z+\int_{t_0}^{t^*}[P+R+\int_0^{+\infty}Q(s)\mathrm{d}s]\alpha z\mathrm{d}s\}<E_m\{\alpha z\}=\alpha z_m$$

这与(6)式中的第一个等式矛盾。让 $\alpha\to 1^+$，那么 $V(t)\leqslant z, t\geqslant t_0$。 证毕

下面利用定理 1 的结论来讨论方程(1)的稳定性。

定理 2 假设对任意 $t\in\mathbf{R}$，$x,y\in\mathbf{R}^n$

$$[f(t,x,y)]^+\leqslant K[x]^++L[y]^+, [g(t-s,x)]^+\leqslant H(t-s)[x]^+ \tag{8}$$

这里 $K=(k_{ij})_{n\times n}$，$L=(l_{ij})_{n\times n}$ 为非负矩阵，$Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times n}$，$q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+]$，$i,j=1,2,\cdots,n$，且存在某正数 r 使得 $\int_0^{+\infty}h_{ij}(s)\mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s<+\infty$。如果 $D\in M$，$D=-(A^*+K+L+\int_0^{+\infty}H(s)\mathrm{d}s)$，那么方程(1)的零解是全局指数稳定的。

证明 由假设(8),沿方程(1)求 Dini 导数 $D^+[x(t)]^+$

$$D^+[x(t)]^+ = \operatorname{sgn}(x)x'(t) \leqslant A^*[x(t)]^+ + [f(x(t),x(t-r(t)))]^+ + \int_0^{+\infty}[g(s,x(t-s))]^+\mathrm{d}s \leqslant$$

$$(A^* + K)[x(t)]^+ + L[x(t)]_\tau + \int_0^{+\infty}H(s)[x(t-s)]^+\mathrm{d}s, t \geqslant t_0 \tag{9}$$

由于 $D \in M$,则存在正向量 z 满足 $Dz > 0, (A^* + K + L + \int_0^{+\infty}K(s)\mathrm{d}s)z < 0$

利用连续性和 $\int h_{ij}(s)\mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s < +\infty$,则存在常量 $\lambda > 0$ 满足

$$\left(\lambda I + A^* + K + L + \int_0^{+\infty}H(s)\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s\right)z < 0 \tag{10}$$

对于任意初始条件 $x(t_0+s) = \phi(s), -\infty < s \leqslant 0, \phi \in C$,有

$$[x(t)]^+ \leqslant z^* \|\phi\| \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}, -\infty < t \leqslant t_0$$

其中 $z^* = \dfrac{1}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{z_i\}}z \geqslant E$, $E = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$。设 $V(t) = [x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)}$,显然

$$V(t) = [x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant z^*\|\phi\|, t \leqslant t_0 \tag{11}$$

利用(9)式,进一步有 $D^+V(t) = \lambda[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} + D^+[x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant$

$$\lambda V(t) + (A^* + K)V(t) + L[V(t)]_\tau + \int_0^{+\infty}H(s)\mathrm{e}^{\lambda s}V(t-s)\mathrm{d}s =$$

$$(\lambda I + A^* + K)V(t) + L[V]_\tau + \int_0^{+\infty}H(s)V(t-s)\mathrm{d}s, t \geqslant t_0 \tag{12}$$

结合定理 1 和(10)~(12)式,有 $V(t) = [x(t)]^+\mathrm{e}^{\lambda(t-t_0)} \leqslant z^*\|\phi\|, t \geqslant t_0$

上式蕴涵方程(1)是全局指数稳定的。 证毕

文献[4-6]考虑下列具有离散时滞形式的神经网络的数学模型及其特例。

$$\dot{u}(t) = -Cu(t) + AF(u(t)) + BG(u(t-r(t))) + J, t \geqslant t_0 \tag{13}$$

其中 $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_n(t))^{\mathrm{T}}$, $C = diag\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$, $F(u(t)) = F_1(u_1(t)), F_2(u_2(t)), \cdots, F_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}}$, $G(u(t)) = (G_1(u_1(t)), G_2(u_2(t)), \cdots, G_n(u_n(t)))^{\mathrm{T}}$, $j = (j_1, j_2, \cdots, j_n)^{\mathrm{T}}$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))^{\mathrm{T}} \in C$, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 满足 Lipschtiz 条件

$$[F(u) - F(v)]^+ \leqslant K[u-v]^+, [G(u) - G(v)]^+ \leqslant L[u-v]^+, u, v \in \mathbf{R}^n \tag{14}$$

利用定理 2 的结果,讨论系统(14)的平衡点的稳定性[4-6]。

定理 3 假设条件(14)成立,如果 $D \in M$, $D = C - [A]^+K - [B]^+L$,那么系统(13)存在唯一的全局指数稳定的平衡态。

证明 为了说明系统(13)平衡点的存在性,即代数方程 $-Cu + AF(u) + BG(u) + J = 0$ 有界,定义空间算子 $T(u) = C^{-1}(AF(u) + BG(u) + J)$, $u \in \mathbf{R}^n$。由(14)有

$$[T(u)]^+ \leqslant C^{-1}[A]^+ + [F(u)]^+ + [B]^+[G(u)]^+ + [J]^+ \leqslant C^{-1} + [A]^+K[u]^+ + [B]^+L[u]^+ + C^{-1}W$$

这里 $W = [A]^+[F(0)]^+ + [B]^+[G(0)]^+ + [J]^+$,由 $D \in M$,则存在正向量 z 使得 $[J]^+ \leqslant Dd = (C^{-1} - [A]^+K - [B]^+L)d$,从而有 $C^{-1}([A]^+K + [B]^+Ld) + C^{-1}W \leqslant d$。

定义有界闭集 $\Omega = \{u \in \mathbf{R}^n \mid [u]^+ \leqslant d\}$。那么对任意 $u \in \Omega$ 有 $[T(u)]^+ \leqslant d$,即 $T(u) \in \Omega$。利用 Brouwer 不动点原理,T 有不动点 $u^* \in \Omega$,即系统(14)存在平衡点 u^*。设

$$x(t) = u(t) - u^* = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$$

那么

$$\dot{x}(t) = -Cx(t) = A\hat{f}(x(t)) + \int_{-\infty}^{t}K(t-s)\hat{g}(x(s))\mathrm{d}s, t \geqslant t_0 \tag{15}$$

$$\hat{f}(x(t)) = f(x(t) + u^*) - f(u^*), \hat{g}(x(t)) = g(x(t) + u^*) - g(u^*)$$

且

$$[\hat{f}(x(t))]^+ \leqslant K[(x(t)]^+, [\hat{g}(x(t))]^+ \leqslant L[(x(t)]^+$$

由 $D \in M$ 和定理 2 的结论,方程(15)的零解是全局指数稳定的。因此系统(13)的平衡点是全局指数稳定且

唯一。 证毕

文献[7-8]考虑下列具有分布时滞形式的神经网络的数学模型

$$\dot{u}(t)=-Cu(t)+AF(u(t))+B\int_{-\infty}^{t}Q(t-s)G(u(s))\mathrm{d}s+J,t\geqslant t_0 \tag{16}$$

其中 $Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times n},q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+],\int_0^{+\infty}q_{ij}(s)\mathrm{d}s=1$,其它参数的约定和系统(13)相同。

利用定理2的结果,类似于定理3的证明,有定理4。

定理4 假设条件(14)式成立,如果 $D\in M,D=C-[A]^+K-[B]^+L$,那么系统(16)存在唯一的全局指数稳定的平衡态。

注1 定理3改进了文献[4]中定理2.1,文献[5]中定理2.3和文献[6]中定理1.3的结果,定理4推广了文献[7-8]的主要结论。

参考文献:

[1] Kolmanovskii V, Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Pulishers, 1999.

[2] 王慕秋,王联,杜雪堂. 关于Volterra型积分微分方程的稳定性[J]. 应用数学学报, 1992, 15(2): 184-193.

[3] 李寿佛. Banach空间中非线性刚性Volterra泛函微分方程稳定性分析[J]. 中国科学A, 2005, 35(3): 286-301.

[4] Driessche P V D, Zou X F. Global attractivity in delayed Hopfield neural networks models[J]. SIAM J Appl Math, 1998, 58(6): 1878-1890.

[5] Mohamad S. Global exponential stability of continuous-time and discrete-time delayed bidirectional neural networks[J]. Phys D, 2001, 159(3-4): 233-251.

[6] Cao J, Wang J. Global asymptotic stability of a general class of recurrent neural networks with time-varying delays[J]. IEEE Trans Circuits Systems I, 2003, 50(1): 34-44.

[7] Zhang Q, Wei X P, Xu J. Global exponential stability of Hopfield neural networks with continuously distributed delays[J]. Physics Letters A, 2003, 315(8): 431-436.

[8] Zhao H Y. Global asymptotic stability of Hopfield neural network involving distributed delays[J]. Neural Networks, 2004, 17(1): 47-53.

[9] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[10] 冯菊,李树勇. 一类非线性时滞抛物方程解振动的充要条件[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2007, 28(2): 158-160.

Stability Analysis of a Class of Integro-differential Equations with Time Delays

XIE Xin-huai

(Chongqing Electric Power College, Chongqing 400053, China)

Abstract: In this paper a class of delayed integro-differential equations is considered. By using the properties of M-matrices and analysis techniques, a delayed differential-integro inequality is established. Based on the inequality, we obtain some sufficient conditions of the global exponential stability of the zero solution of the equations. Lastly we apply our theorem to some mathematic models and obtain some new results, example theorem one: if $V(t)\in C[\mathbf{R},\mathbf{R}_+^n]$ meets with the fuoming nonlinear integro-differential inequality $D^+V(t)=PV(t)+RV[V(t)]_\tau+\int_0^{+\infty}Q(s)V(t-s)\mathrm{d}s,t\geqslant t_0$, here $P=(P_{ij})_{n\times n},P_{ij}\geqslant 0(i\neq j),R=(r_{ij})_{n\times n},r_{ij}\geqslant 0,Q(s)=(q_{ij}(s))_{n\times}n,q_{ij}(s)\in C[\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+],\int_0^{+\infty}q_{ij}(s)\mathrm{d}s<+\infty,i,j=1,2,\cdots,n$. Suppose a positive vector $z>0$ exsited which makes-$(P+R+\int_0^{+\infty}Q(s)\mathrm{d}s)z<0$. It will be $V(s)\leqslant z,-\infty<s\leqslant t_0$ when $V(t)\leqslant z,t\geqslant t_0$ which extends and improves some related ones.

Key words: nonlinear integro-differential equation; delay; global exponential stability; M-matrix.

(责任编辑 黄 颖)