微分方程奇异摄动边界层问题的数值逼近解*

余 文 波
(江西理工大学 教务部, 南昌 330013)

摘要 通过对抛物型偏微分方程和一阶双曲型偏微分方程奇异摄动问题的讨论,提出了在使边界层的特性不至于丧失的前提下的边界层格式。对一类在 Ω_1 和 Ω_2 上的抛物型奇异摄动的初、边值问题进行了进一步研究,利用渐近方法、差分方法和常微分方程的二点边值问题的方法,求得了偏微分方程边界层问题的数值解。得到了当步长可取中等大小,$h\to 0$,$\tau\to 0$,$\varepsilon\to 0$ 时,且当自由项函数和初、边值条件函数均为给定的充分光滑的函数,含有小参数 $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$ 的一类偏微分方程奇异摄动问题的一致数值逼近解。并将此结论应用于实际问题中。

关键词 抛物型;奇异摄动;边界层;数值逼近解
中图分类号:O175.2　　文献标识码:A　　文章编号:1672-6693(2009)01-0065-04

诸多实际工程领域中的很多问题都可以用奇异摄动问题来描述。从数学的角度来看,这类问题的解对某些参数总呈现出一种不一致收敛行为。因此如何获得这类问题的数值逼近解,一直是大家高度关注的问题[1-5]。近年来,奇异摄动方程的边界问题得到了一定程度的研究[6-12]。本文研究了一类抛物型偏微分方程奇异摄动边界层问题的数值逼近解。

问题 I　在区域 R:$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1$ 上考虑抛物型方程的混合初值和边值问题

$$L_\varepsilon u(x,t)=a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t)\ (0<x<1, 0<t\leqslant 1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1),\ u(0,t)=g_0(t), u(1,t)=g_1(t)\ (0\leqslant t\leqslant 1)\tag{1}$$

其中 $0<\varepsilon\ll 1$ 是一小参数,$a(x,t)$,$f(x,t)$ 和 $\varphi(x)$,$g_0(t)$,$g_1(t)$ 均为给定的充分光滑的函数。

当 $\varepsilon=0$ 时,问题(1)退化为以下微分方程边值问题

$$a(x,t)\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=f(x,t), \omega(0,t)=g_0(t), \omega(1,t)=g_1(t)\tag{2}$$

显然,在 $t=0$ 处失去了初值条件。于是当 $\varepsilon\to 0$ 时在 $t=0$ 附近问题(1)的解不可能一致逼近于退化问题(2)的解,那么将产生边界层现象。

根据渐近方法的分析,问题(1)的解当 $\varepsilon\to 0$ 时在区域 R 上可一致表示为

$$u_\varepsilon(x,t)=\omega(x,t)+v(x,t_1)+o(\varepsilon)$$

其中 $t_1=t/\varepsilon$ 为伸长变量,ω 为退化问题(2)的解,v 是边界层问题

$$a(x,0)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v}{\partial t_1}, v(x,0)=\varphi(x)-\omega(x,0), v(0,t_1)=0, v(1,t_1)=0, \lim_{t_1\to\infty}v=0\tag{3}$$

的解。

问题 II　在区域 R:$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1$ 上考虑下列问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0<x<1, 0\leqslant t\leqslant 1), u(0,t)=\alpha_1, u(1,t)=\alpha_2\ (0\leqslant t\leqslant 1)$$
$$u(x,0)=\varphi(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)\tag{4}$$

其中 $a>0$ 为常数,ε 为小参数,α_1,α_2 为给定的常数,$\varphi(x)$ 是给定的充分光滑的函数。

* 收稿日期:2008-03-10　　修回日期:2008-09-03
作者简介:余文波,男,副教授,研究方向为微分方程、软件工程。

当 $\varepsilon = 0$ 时,摄动问题(4)退化为一阶双曲型方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\frac{\partial w}{\partial x} = 0(0 < x < 1, 0 < t \leqslant 1), \omega(0,t) = \alpha_1(0 \leqslant t \leqslant 1), \omega_1(1,t) = \alpha_2(0 \leqslant t \leqslant 1) \qquad (5)$$

显然,在 $x = 0$ 处失去了边界条件,于是当 $\varepsilon \to 0$ 时,在 $x = 0$ 附近问题(4)的解不可能一致逼近于退化问题(5)的解,那么将产生边界层现象。

1 基本结论及证明

结论1 设 Ω_1:$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon m$;$\Omega_2$:$0 \leqslant x \leqslant 1, \varepsilon m < t \leqslant 1, m \ll 1/\varepsilon$,若 t 给定,ω_h 是退化问题(2)的数值解,$v_{1,h,\tau}$ 是在 t_1 方向取中等大小的步长,用差分方法求得边界层问题的数值解,则当 $h \to 0, \tau \to 0, \varepsilon \to 0$ 时,可用

$$u_{h,\tau} = \begin{cases} w_h + v_{1,h,\tau} & (\text{在 } \Omega_1 \text{ 上}) \\ \omega_h & (\text{在 } \Omega_2 \text{ 上}) \end{cases} \qquad (6)$$

逼近奇异摄动问题(1)的解 u_ε。

证明 因为问题(2)不含小参数 ε,则通常的数值方法可直接应用到退化问题(2)。

由奇异摄动理论,可知边界层问题(3)的解仅当 t_1 在0附近产生影响,于是可考虑下列修改

$$a(x,0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial v_1}{\partial t_1}(0 < x < 1, 0 < t_1 \leqslant m), v_1(x,0) = \varphi(x) - \omega(x,0)(0 < x < 1)$$

$$v_1(0,t_1) = 0, v_1(1,t_1) = 0(0 \leqslant t_1 \leqslant m)$$

其中 $|v_1(x,m)| \leqslant \varepsilon$。

这时在区域 Ω_1 上的抛物型方程的初、边值问题,可用差分方法求解。

如果假定 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$,则当 $\varepsilon \to 0$ 时,有 $\left.\begin{aligned} &u_\varepsilon \approx \omega + v_1 \quad (\text{在 } \Omega_1 \text{ 上}) \\ &u_\varepsilon \approx \omega \quad (\text{在 } \Omega_2 \text{ 上}) \end{aligned}\right\}$,因此,当 $h \to 0, t \to 0, \varepsilon \to 0$ 时,可用 $u_{h,\tau} = \begin{cases} w_h + v_{1,h,\tau} & (\text{在 } R_1 \text{ 上}) \\ \omega_h & (\text{在 } R_2 \text{ 上}) \end{cases}$,逼近奇异摄动问题(6)的解 u_ε。 证毕

由于退化问题(5)不含小参数 ε,则可直接应用数值方法。事实上,可取隐格 $\left.\begin{aligned} &\frac{\omega_{k,j+1} - \omega_{k,j}}{\tau} - a\frac{\omega_{k+1,j+1} - \omega_{k,j+1}}{h} = 0 \\ &\omega_{k,0} = \varphi_k, \omega_{N,j} = \alpha_2 \end{aligned}\right\}$,易证此格式是无条件稳定的。

根据渐近方法的分析,当 $\varepsilon \to 0$ 时问题(4)的解 u_ε 可一致地表示为

$$u_\varepsilon(x,t) = \omega(x,t) + v(z,t) + o(\varepsilon)$$

其中 $z = x/\varepsilon$ 为伸长变量,ω 为退化问题(5)的解,v 是边界层问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + a\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = 0, v(0,t) = \alpha_1 - \omega(0,t), \lim_{z\to\infty} v = 0 \qquad (7)$$

的解。

考虑下列修改 $$\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}z^2} + a\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}z} = 0, v_1(0,t) = \alpha_1 - \omega(0,t), v_1(m,t) = 0$$

当 t 给定时,这是常微分方程的二点边值问题,其中可取 $m \ll 1/\varepsilon$,$|v_1 - v| \leqslant \varepsilon$。

若假定 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$,$\Omega_1$:$0 \leqslant t \leqslant 1, \varepsilon m < x < 1$;$\Omega_2$:$0 \leqslant t \leqslant 1, 0 < x \leqslant \varepsilon m$,则当 $\varepsilon \to 0$ 时,有 $\left.\begin{aligned} &u\varepsilon \approx \omega \quad (\text{在 } \Omega_1 \text{ 中}) \\ &u_\varepsilon \approx \omega + v_1 \quad (\text{在 } \Omega_2 \text{ 中}) \end{aligned}\right\}$,从而,可得

结论2 若 $\omega_{k,\tau}$ 是退化问题(5)的数值解,v_{1,h_1} 是常微分方程二点边值问题(7)的数值解,可取中等大小的步长,则当 $h \to 0, \tau \to 0, h_1 \to 0, \varepsilon \to 0$ 时,可用

$$u_{h,\tau} = \begin{cases} \omega_{h,\tau} & (\text{在 } \Omega_1 \text{ 中}) \\ \omega_{h,\tau} + v_{1,h_1} & (\text{在 } \Omega_2 \text{ 中}) \end{cases}$$

逼近奇异摄动问题(4) 的解 u_ε。

2 应用举例

例　考虑问题 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = 3x - 1(0 < x < 1, 0 < t \leqslant 1)$$

$$u(x,0) = (x^3 - x^2)/2 + \sin \pi x(0 \leqslant x \leqslant 1), u(0,t) = 0, u(1,t) = 0(0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{8}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,问题(8) 退化为下列问题

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 3x - 1(0 < x < 1), \omega(0,t) = 0, \omega(1,t) = 0(0 \leqslant t \leqslant 1)$$

边界层问题为 $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t_1}(0 < x < 1, t_1 > 0), v(x,0) = \sin \pi x(0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$v(0,t_1) = 0, v(1,t_1) = 0(t_1 > 0)$$

于是,作如下修改 $$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial v_1}{\partial t_1}(0 < x < 1, 0 < t_1 \leqslant m), v_1(x,0) = \sin \pi x(0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$v_1(0,t_1) = 0, v_1(1,t_1) = 0(0 \leqslant t_1 \leqslant m)$$

取 $m \ll 1/\varepsilon$, $|\exp(-m\pi^2)\sin \pi x| \leqslant \varepsilon$,则 $m \geqslant \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\pi^2}$。

若 $\varepsilon = 10^{-6}$,则可取 $m = 1.4$。

下面仅就 $\varepsilon = 10^{-6}$ 的情形,对精确解和数值解选取若干个点列于表 1。

表 1　若干的点精确解和数值解

点的坐标	精确解	数值解	误差
$(0.01, 10^{-8})$	0.284 092 2E-01	0.284 071 5E-01	0.207 126 1E-05
$(0.09, 10^{-8})$	0.249 085 5E+00	0.249 067 1E+00	0.184 476 4E-04
$(0.17, 10^{-8})$	0.449 207 3E+00	0.449 173 6E+00	0.335 872 2E-04
$(0.25, 10^{-8})$	0.617 214 4E+00	0.617 167 0E+00	0.470 280 6E-04
$(0.33, 10^{-8})$	0.743 366 5E+00	0.743 309 7E+00	0.567 436 2E-04
$(0.41, 10^{-8})$	0.820 454 1E+00	0.820 391 8E+00	0.622 868 5E-04

由此可知,当在边界层附近计算精确解时,必需在 t 方向取步长 $\tau = 10^{-8}$,而在计算边界层问题的数值逼近解时,仅需在 t_1 方向取步长 $\tau_1 = 10^{-2}$。

参考文献:

[1] Nayfeh A H. Perturbation method[M]. New York: Wiley-interscience, 1973.

[2] Chen L Y. Goldenfeld N, Oono Y. Renomalization group and singular perturbations: multrple scales, boundary layers and perturbation theory[J]. Phys RevE, 1996, 54: 376-394.

[3] Chang K W, Howes F A. Nonlinear singular phenomena: theory and applications[M]. New York: Springs-Verlag, 1984.

[4] Melenk J M, Schwabc. Analytic regularity for a singularly perturbed problem[J]. SIAM J ApplMath, 1999, 30: 379-400.

[5] 张林华,吴永. 李群方法里的矩阵指数计算[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2008,25(3):17-20.

[6] Struckmerer J, Unterreiter A. On a recursive approximation of singularly perturbed parabolic equations[J]. J Math Anal Appl, 2000, 250: 245-265.

[7] Glizer V Y, Fridman E H. Control of linear singularly perturbed system with state delay[J]. J Math Anal Appl, 2000, 250: 49-85.

[8] Butuzov V F, Nefedov N N, Schneider K R. Singularly perturbed elliptic problems in the case of exchange stabilities[J]. J Dif-

ferential Equations, 2001, 169 :373-395.
[9] Kelley W G. A singular perturbation problem of carrier and pearson[J]. J Math Anal Appl, 2001, 255 :678-697.
[10] Mo J Q, Cheng O Y. A class of nonlocal boundary value problems of nonlinear elliptic systems in unbounded domains[J]. Acta Math Sci, 2001, 21(1) :93-97.
[11] Nayfeh A H. Introduction to perturbed techniques[M]. New York :John Wiely & Sons, 1981.
[12] 叶志勇,杜文久. 转点处出现边界层现象的奇异摄动边值问题[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2000,25(1) :7-10.

On the Numerical Approach Solution to the Problem of Boundary Layer of Singular Perturbation for the Differential Equation

YU Wen-bo
(Academic Affairs office, Jiangxi University of Science and Technology, Nanchang 330013, China)

Abstract :Through discussing the singular perturbed problem of parabolic type and first-order hyperbolic type in partial differential equations, this paper puts forward a boundary layer format without losing its characteristics. Furthermore, initial and boundary values problems of parabolic-type singular perturbation on Ω_1 and Ω_2 are researched. In the use of asymptotic method, difference method and two-point boundary value problem methods in ordinary differential equation, we have gained a numerical solution to boundary layer in partial differential equation. Moreover, on the premise of step size middling and h, τ and ε each approaching to zero, when free functions and initial, boundary values condition functions are smooth functions given, we obtain a uniformly numerical approach solution to the singular perturbed problem of one partial different equation with a small parameter $\varepsilon(0<\varepsilon\ll 1)$. Finally, we apply the conclusions to practice.

Key words :parabolic type ;singular perturbation ;boundary layer ;numerical approach solution

(责任编辑 欧红叶)