运筹学与控制论

r-预不变凸函数的一个等价条件*

陈　乔, 罗　杰
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘要：在上半连续条件给出了 r-预不变凸函数一个等价条件。本文利用上半连续函数在紧集上必有最大值,设 K 是关于 η 的开不变凸集,η 满足条件 C,f 上半连续且满足 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$, $\forall x,y\in K$,得到 f 关于 η 为 r-预不变凸函数当且仅当 $\exists\alpha\in(0,1)$, $\forall x,y\in K$, s. t. $\begin{cases} f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant \log(\alpha e^{rf(x)}+(1-\alpha)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}, r\neq 0 \\ f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), r=0 \end{cases}$。本文排除了 K 是开集这一条件,并且没用 A 在 $[0,1]$ 上的稠密性。

关键词：不变凸集；预不变凸函数；r-预不变凸函数；紧集
中图分类号：O221.1　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2009)01-0011-02

凸性及广义凸性在数学规划及最优化等领域中具有十分重要的作用[1-10]。Weir 等人在文献[2-3]中引入了预不变凸函数的定义,建立了非线性规划的最优性条件。文献[4]中,杨等人利用半连续性和稠密性研究了预不变凸函数的一些性质。作为凸性另一方面的重要推广,文献[6]中,Avriel 提出了 r-凸函数,获得了一些重要的性质。2005 年,文献[7]中,作为对预不变凸性和 r-凸性概念的进一步推广,Antczak 介绍了 r-预不变凸函数的定义,并讨论了其在数学规划中的应用,包括最优性条件及对偶问题。

本文受文献[4]中研究工作的启发,利用上半连续函数在紧集上可取得最大值,获得了有关 r-预不变凸函数等价性的证明方法。

1 预备知识

本文均假定 $K\subseteq \mathbf{R}^n$,η：$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, f：$K\to\mathbf{R}$,下面给出本文所需要的一些基本概念及相关性质。

定义 1[2-3]　称 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的不变凸集。若 $\exists\eta$：$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,对

$$\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1], y+\lambda\eta(x,y)\in K$$

定义 2[2-3]　K 关于 η 为不变凸集,称 f：$K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预不变凸函数。若对 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$,有 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

定义 3[7]　K 关于 η 为不变凸集,称 f 关于 η 为 r-预不变凸函数。若 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$\begin{cases} f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\log\{\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)}\}^{\frac{1}{r}}, r\neq 0 \\ f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y), r=0 \end{cases}$$

显然 $r=0$ 时,r-预不变凸函数退化为预不变凸函数,因此本文讨论当 $r\neq 0$ 时的情形。

引理 1　设 K 是紧集,f 是上半连续函数,则 f 在 K 上取得最大值。

引理 2[7]　$f(x)$ 是关于 η 的 r-预不变凸(凹)函数当且仅当 $e^{rf(x)}$ 是关于相同 η 的预不变凸函数 $r>0$(预不变凹函数 $r<0$)。

条件 C[5]　称 η 满足条件 C,若对 $\forall x,y\in K,\forall\lambda\in[0,1]$,有

* 收稿日期：2008-09-02　　修回日期：2008-12-15
资助项目：国家自然科学基金(No. 10171118)
作者简介：陈乔,女,硕士研究生,研究方向为最优化理论与算法。

$$\begin{cases}\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)\\ \eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)\end{cases}$$

2 主要结论

定理1 设K是关于η的不变凸集,η满足条件C,f上半连续且满足$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,$\forall x,y\in K$,则$f$关于$\eta$为$r$-预不变凸函数当且仅当$\exists\alpha\in(0,1)$,对

$$\forall x,y\in K,\text{s. t.}\begin{cases}f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\log(\alpha e^{rf(x)}+(1-\alpha)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},\ r\neq0\\ f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),r=0\end{cases}$$

证明 必要性是显然的。

下面证明充分性。当$r\neq0$时,由引理2,只需证$e^{f(x)}$是预不变凸函数。假设$e^{rf(x)}$关于η不是预不变凸函数,则存在$\bar{\lambda}\in(0,1)$和$\forall x,y\in K$,使得

$$e^{rf(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))}>\bar{\lambda}e^{rf(x)}+(1-\bar{\lambda})e^{rf(y)}$$

令$g(\lambda)=e^{rf(y+\lambda\eta(x,y))}-\lambda e^{rf(x)}-(1-\lambda)e^{rf(y)}$,因$f$是上半连续的,故$g(\lambda)$在$[0,1]$上也是上半连续函数,则由引理1知,$g(\lambda)$在$[0,1]$上存在最大值$M_0$。令$\lambda_0=\max\{\lambda\in[0,1]:g(\lambda)=M_0\}$,易知$g(0)=0$。

由$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$,可知$g(1)=e^{rf(y+\eta(x,y))}-e^{rf(x)}\leqslant0$,因而$\lambda_0\in(0,1)$。选择$\delta$,使得

$$(\lambda_0-(1-\alpha)\delta,\lambda_0+\alpha\delta)\subset(0,1)$$

令$\lambda_1=\lambda_0+\alpha\delta$,$\lambda_2=\lambda_0-(1-\alpha)\delta$,$x^*=y+\lambda_2\eta(x,y)$,$y^*=y+\lambda_1\eta(x,y)$。由条件C知

$$y^*+\alpha\eta(x^*,y^*)=y+\lambda_1\eta(x,y)+\alpha\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))\tag{1}$$

因$\lambda_1-\lambda_2>0$,故$0<\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}<1$。又由条件C可得

$$\eta(y+\lambda_2\eta(x,y),y+\lambda_1\eta(x,y))=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2}\eta(x,y+\lambda_2\eta(x,y))=-\delta\eta(x,y)\tag{2}$$

从而由(1),(2)式知

$$y^*+\alpha\eta(x^*,y^*)=y+\lambda_1\eta(x,y)-\alpha\delta\eta(x,y)=y+(\lambda_0+\alpha\delta)\eta(x,y)-\alpha\delta\eta(x,y)=y+\lambda_0\eta(x,y)$$

故由中点r-预不变凸性和引理1有

$$\begin{gathered}M_0=g(\lambda_0)=e^{rf(y+\lambda_0\eta(x,y))}-\lambda_0e^{rf(x)}-(1-\lambda_0)e^{rf(y)}=\\ e^{rf(y^*+\alpha\eta(x^*,y^*))}-\lambda_0e^{rf(x)}-(1-\lambda_0)e^{rf(y)}\leqslant\alpha e^{rf(x^*)}+(1-\alpha)e^{rf(y^*)}-\lambda_0e^{rf(x)}-(1-\lambda_0)e^{rf(y)}=\\ \alpha[e^{rf(x^*)}-\lambda_2e^{rf(x)}-(1-\lambda_2)e^{rf(y)}]+(1-\alpha)[e^{rf(y^*)}-\lambda_1e^{rf(x)}-(1-\lambda_1)e^{rf(y)}]=\\ \alpha[e^{rf(y+\lambda_2\eta(x,y))}-\lambda_2e^{rf(x)}-(1-\lambda_2)e^{rf(y)}]+(1-\alpha)[e^{rf(y+\lambda_1\eta(x,y))}-\lambda_1e^{rf(x)}-(1-\lambda_1)e^{rf(y)}]=\\ \alpha g(\lambda_2)+(1-\alpha)g(\lambda_1)<\alpha M_0+(1-\alpha)M_0=M_0\end{gathered}$$

矛盾,定理得证。 证毕

注1 本文没用A在$[0,1]$上的稠密性。

注2 本文排除了K是开集这一条件。

参考文献:

[1] Kantorovich L V, Akilov G P. Functional analysis[M]. Second Edition. New York: Pergamon press Inc, 1982.
[2] Weir T, Bond B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. J Math Anal Appl, 1988, 136: 29-38.
[3] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bull Austral Math Soc, 1988, 38: 177-189.
[4] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 256: 229-241.
[5] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.
[6] Avriel M. r-convex functions[J]. Mathematical Programming, 1972, 2: 309-323.

[7] Antczak T. r-pre-invexity and r-invexity in mathematical programming[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005 (50): 551-556.
[8] 赵克全,陈哲,郭辉. 预不变拟凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2008, 25(4): 1-2.
[9] 彭再云,罗洪林. 关于强预不变凸函数的注记[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(3): 36-39.
[10] 赵克全. r-预不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23(1): 10-13.

An Equivalent Condition of *r*-preinvex Functions

CHEN Qiao, LUO Jie

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: An equivalent condition of r-preinvexity was given by condition C which was introduced by S. R. Mohan and S. K. Neogy. In this paper another proof is provided about the equivalent condition by the use of the conclusion which upper semicontinuous function has maximum on compact set. That is, let K be an open invex set with respect to η and η satisfies condition C. Let f be a upper semicontinuous function that satisfies $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$, $\forall x,y\in K$. Then f is a r-preinvex function for the same η if and only if $\exists \alpha\in(0,1)$, $\forall x,y\in K$, s. t. $\begin{cases} f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant \log(\alpha e^{rf(x)}+(1-\alpha)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}, r\neq 0 \\ f(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), r=0 \end{cases}$. The proof is absence of the assumption which set K is open and A is dense on $[0,1]$.

Key words: invex set; preinvex functions; r-preinvex functions; compact set

(责任编辑 黄 颖)