运筹学与控制论

带有二次约束的一些非凸二次规划问题的全局最优性条件*

李国权，吴至友
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：利用 Z. Y. Wu 等人最近提出的一种新的研究全局优化问题的全局最优性条件的方法，研究了一些带有二次约束的非凸二次规划问题的全局最优性条件，得到了一些带有二次约束的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件，同时也得到了一些无约束非凸二次规划问题的全局最优性充分条件，并证明了在一些特殊情况下，本文的一些结果与文献中的一些结论是一致的。在有些情况下，本文的有些结果还推广了现有文献中的一些结论。

关键词：全局最优性条件；L-次微分；二次规划
中图分类号：O221.2　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2008)03-0001-04

1 预备知识

近年来，在如何刻画一个凸规划问题的解方面，特别是在凸规划问题的必要条件的研究方面已经取得很大的进展。然而，在如何刻画一个非凸规划问题的全局最优解方面，却还存在很大的局限。最近 Z. Y. Wu 等人提出了一种新的研究全局优化问题的全局最优性条件的方法[1-7]，对全局优化问题的最优性条件的研究取得了很大的突破。本文利用 Z. Y. Wu 等人提出的这种新方法研究了一种更广泛的非凸二次规划问题的全局最优性充分条件。并证明了，在一些特殊情况下，本文的结论与文献[1,2]中的一些结论是一致的，在有些情况下本文的有些结论还推广了文献[8]中的相关结论。

首先介绍几个基本概念。本文将使用的一些记号：$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间，$\mathbf{R}^n_+$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中所有非负元素所成的集合，即 $\lambda \in \mathbf{R}^m_+$ 表示 $\lambda \geqslant 0$，$e(1,\cdots,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，$I$ 表示单位矩阵，$A \geqslant 0$ 表示矩阵 A 是半正定的，对角线上的元素 $q_1,\cdots,q_n$ 的对角矩阵记为 $diag(q_1,\cdots,q_n)$，$E(A)$ 表示矩阵 A 的最小特征值。

令 L 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一些实值函数所成的集合。

定义 1[9]　(L-次微分) 令 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$，$x_0 \in \mathbf{R}^n$，$l \in L$ 称为 f 在 x_0 的 L-次梯度，如果 $f(x) \geqslant f(x_0) + l(x) - l(x_0)$，$\forall x \in \mathbf{R}^n$。$f$ 在 x_0 的所有 L-次梯度的集合 $\partial_L f(x_0)$ 称为 f 在 x_0 的 L-次微分。

值得注意的是，如果 L 是所有线性函数所成的集合，f 是一个下半连续的凸函数，则 $\partial_L f(x) = \partial f(x)$，这里 $\partial f(x)$ 是指一般凸分析意义上的凸函数的次梯度。

本文定义集合 L

$$L := \left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}\beta \mid Q = diag(q), q, \beta \in \mathbf{R}^n\right\}。$$

2 主要结论

本文主要考虑如下二次规划问题

$$(\mathrm{BQP})\quad \min g_0(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_0x + x^{\mathrm{T}}a_0$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_ix + x^{\mathrm{T}}a_i + c_i \leqslant 0, i = 1,\cdots,m$$

$$g_j(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_jx + x^{\mathrm{T}}a_j + c_j = 0$$

$$j = m+1,\cdots,m+p$$

$$x \in S := \prod_{i=1}^{n}\{u_i, v_i\}$$

其中 $A_0 \in S^n$，$a_0 \in \mathbf{R}^n$，$a_i \in \mathbf{R}^n$，$c_i \in \mathbf{R}$，$A_i \in S^n$，$i = 1,\cdots,m+p$，S^n 为 $n \times n$ 实对称矩阵作成的集合，$u_i < v_i$，$i = 1,\cdots,n$，是给定的实数。

令　　$I = \{1,\cdots,m\}$

* 收稿日期：2008-05-13
资助项目：新世纪优秀人才支持计划(No. NCET-06-0776)
作者简介：李国权(1984-)，男，硕士研究生，研究方向为最优化理论与方法。通讯作者：吴至友，Email：zywu@cqnu.edu.cn

$$J = \{m+1,\cdots,m+p\}$$
$$C = \{x \in S \mid g_i(x) \leqslant 0, g_j(x) = 0, i \in I, j \in J\}$$
$$u = (u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}, v = (v_1,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$$

对给定的$\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$,$\mu = (\mu_1,\cdots,\mu_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^p$,令

$$H_{\lambda,\mu} = A_0 + \sum_{i\in I}\lambda_i A_i + \sum_{j\in J}\mu_j A_j$$
$$b_{\lambda,\mu} = a_0 + \sum_{i\in I}\lambda_i a_i + \sum_{j\in J}\mu_j a_j$$
$$F_{\lambda,\mu} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}H_{\lambda,\mu}x + x^{\mathrm{T}}b_{\lambda,\mu} + \sum_{i\in I}\lambda_i c_i + \sum_{j\in J}\mu_j c_j$$

对$\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in C$,令

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} -1,\text{若 } \bar{x}_i = u_i \\ 1,\text{若 } \bar{x}_i = v_i \end{cases}, i = 1,\cdots,n$$
$$\widetilde{X} = diag(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n), \bar{X} = diag(\bar{x})$$

命题1 设$\bar{x} \in \mathbf{R}^n$,$\lambda \in \mathbf{R}^m_+$与$\mu \in \mathbf{R}^p$,则

$$\partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) = \left\{\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}\beta \;\middle|\; \begin{array}{l} H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0, Q = diag(q), q \in \mathbf{R}^n \\ \beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x} \end{array}\right\}$$

证明 由定义$l \in \partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x})$当且仅当

$$F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \geqslant l(x) - l(\bar{x}), \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

令$l(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}\beta$,$\varphi(x) = F_{\lambda,\mu}(x) - l(x)$,这里$Q = diag(q)$,$q,\beta \in \mathbf{R}^n$,则

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(H_{\lambda,\mu} - Q)x + x^{\mathrm{T}}(b_{\lambda,\mu} - \beta) + \sum_{i\in I}\lambda_i c_i + \sum_{j\in J}\mu_j c_j$$

由(1)式有$l \in \partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x})$,当且仅当对任意的$x \in \mathbf{R}^n$,$\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x})$,即$\varphi(x)$有下界,而且在$\bar{x}$处达到极小值,其等价于$H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$,即$\varphi(x)$是$\mathbf{R}^n$上的凸函数,而且$\nabla\varphi(\bar{x}) = 0$,即$(H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x} + (b_{\lambda,\mu} - \beta) = 0$,亦即

$$\beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x}$$ 证毕

定理1 设$\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in C$,如果存在$\lambda \in \mathbf{R}^m_+$,$\mu \in \mathbf{R}^p$,以及对角阵

$$Q = diag(q), q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

使得$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$,$H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$且

$$\widetilde{X}(b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x}) - \frac{1}{2}Q(v - u) \leqslant 0 \quad (2)$$

则$\bar{x}$是问题(BQP)的全局极小点。

证明 假设存在$\lambda \in \mathbf{R}^m_+$,$\mu \in \mathbf{R}^p$及$q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$,使得$H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$与(2)式成立,这里$Q = diag(q)$,则令$\beta = b_{\lambda,\mu} + (H_{\lambda,\mu} - Q)\bar{x}$,由命题1有

$$l(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + x^{\mathrm{T}}\beta \in \partial_L F_{\lambda,\mu}(\bar{x})$$

即$F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}) \geqslant l(x) - l(\bar{x}), \forall x \in \mathbf{R}^n$。又因为

$$g_0(x) - g_0(\bar{x}) \geqslant F_{\lambda,\mu}(x) - F_{\lambda,\mu}(\bar{x}), \forall x \in C$$

所以如果$l(x) - l(\bar{x}) \geqslant 0, \forall x \in C$,则$\bar{x}$是问题(BQP)的全局极小点,其中

$$l(x) - l(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{2}(x_i^2 - \bar{x}_i^2) + \beta^{\mathrm{T}}(x - \bar{x}) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + (\beta_i + q_i\bar{x}_i)(x_i - \bar{x}_i) =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(x_i - \bar{x}_i)$$

下面分两种情况讨论。

$\forall x = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in C, x_i \in \{u_i, v_i\}, i = 1,\cdots,n$

1) 若$\bar{x}_i = u_i$,则

$$\frac{q_i}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(x_i - \bar{x}_i) \geqslant 0$$

等价于

$$\frac{q_i}{2}(v_i - u_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(v_i - u_i) =$$
$$\left[\frac{q_i}{2}(v_i - u_i) - \tilde{x}_i((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)\right](v_i - u_i) \geqslant 0$$

2) 若$\bar{x}_i = v_i$,则

$$\frac{q_i}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(x_i - \bar{x}_i) \geqslant 0$$

等价于

$$\frac{q_i}{2}(u_i - v_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(u_i - v_i) =$$
$$\left[-\frac{q_i}{2}(v_i - u_i) + \tilde{x}_i((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)\right](u_i - v_i) \geqslant 0$$

因此,如果(2)式成立,则

$$\frac{q_i}{2}(x_i - \bar{x}_i)^2 + ((b_{\lambda,\mu})_i + (H_{\lambda,\mu}\bar{x})_i)(x_i - \bar{x}_i) \geqslant 0$$

从而$l(x) - l(\bar{x}) \geqslant 0, \forall x \in C$。 证毕

由前面的定理1可以得到一系列特殊非凸二次规划问题的全局最优性充分条件。

1) 首先考虑如下的规划问题

$$(\mathrm{BQP}_1)\ \min g_0(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_0x + x^{\mathrm{T}}a_0$$
$$\text{s.t. } g_i(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_ix + x^{\mathrm{T}}a_i + c_i \leqslant 0, i = 1,\cdots,m$$
$$g_j(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}A_jx + x^{\mathrm{T}}a_j + c_j = 0$$
$$j = m+1,\cdots,m+p$$

$$x \in U_B := \prod_{i=1}^{n} \{-1,1\}$$

令

$$S_1 = \{x \in U_B \mid g_i(x) \leqslant 0, g_j(x) = 0, i \in I, j \in J\}。$$

推论 1　设 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in S_1$，如果存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m, \mu \in \mathbf{R}^p$，以及对角阵 $Q = diag(q), q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I, H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$ 且

$$\bar{X}(b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x}) - Qe \leqslant 0 \tag{3}$$

则 $\bar{x}$ 是问题($\mathrm{BQP_1}$)的全局极小点。

证明　取 $u = -1e, v = e$，由定理 1 很容易证得结论成立。　　证毕

注 1　可以证明推论 1 与文献[2]中的定理 3.1 给出的关于问题($\mathrm{BQP_1}$)的全局最优充分性条件(如下的引理 1)是一致的。

引理 1[2]　设 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in S_1$，如果存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$ 与 $\mu \in \mathbf{R}^p$ 使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$，$i \in I$，且

$$H_{\lambda,\mu} \geqslant diag(\bar{X}H_{\lambda,\mu}\bar{x} + \bar{X}b_{\lambda,\mu}) \tag{4}$$

则 $\bar{x}$ 是问题($\mathrm{BQP_1}$)的全局极小点。

事实上，若条件(4)成立，即存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$，$\mu \in \mathbf{R}^p$，使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$ 且

$$H_{\lambda,\mu} \geqslant diag(\bar{X}H_{\lambda,\mu}\bar{x} + \bar{X}b_{\lambda,\mu})$$

取 $Q = diag(\bar{X}H_{\lambda,\mu}\bar{x} + \bar{X}b_{\lambda,\mu})$，则 $H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$ 且 $\bar{X}(b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x}) - Qe = 0$，即(3)式成立。反之，若(3)式成立，即存在 $\lambda \in \mathbf{R}_+^m$，$\mu \in \mathbf{R}^p$ 和对角阵 $Q = diag(q), q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，使得 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0$，$i \in I, H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$ 且

$$\bar{X}(b_{\lambda,\mu} + H_{\lambda,\mu}\bar{x}) - Qe \leqslant 0$$

则

$$\bar{X}b_{\lambda,\mu} + \bar{X}H_{\lambda,\mu}\bar{x} \leqslant q$$

从而 $Q \geqslant diag(\bar{X}b_{\lambda,\mu} + \bar{X}H_{\lambda,\mu}\bar{x})$。又因为 $H_{\lambda,\mu} - Q \geqslant 0$，故条件(4)成立。

2）考虑如下的无约束非凸二次规划问题

$$(\mathrm{UBQP})\ \min g(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}a$$

$$\text{s.t. } x \in S := \prod_{i=1}^{n} \{u_i, v_i\}$$

其中 $a \in \mathbf{R}^n, A \in S^n, u_i < v_i, u_i, v_i \in \mathbf{R}^n, i = 1,\cdots,n$。

由定理 1 可以得到问题(UBQP)的一个全局最优充分性条件。

推论 2[1]　设 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in S$，如果存在对角阵 $Q = diag(q), q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，使得 $A - Q \geqslant 0$ 且

$$\tilde{X}(a + A\bar{x}) - \frac{1}{2}Q(v-u) \leqslant 0 \tag{5}$$

则 $\bar{x}$ 是问题(UBQP)的全局极小点。

证明　取

$$I = J = \varnothing, A_i = 0, a_i = 0, i \in I \cup J$$

由定理 1 可证得结论成立。　　证毕

注 2　推论 2 与文献[1]中的定理 3.1 一致。

3）考虑如下的 $\{0,1\}$ 二次规划问题

$$(\mathrm{BQP_2})\ \min g(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}a$$

$$\text{s.t. } x \in U_B := \prod_{i=1}^{n} \{-1,1\}$$

其中，$a \in \mathbf{R}^n, A = S^n$。

推论 3　设 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in U_B$，如果存在对角阵 $Q = diag(q), q = (q_1,\cdots,q_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，使得 $A - Q \geqslant 0$ 且

$$\bar{X}(a + A\bar{x}) - Qe \leqslant 0 \tag{6}$$

则 $\bar{x}$ 是问题($\mathrm{BQP_2}$)的全局极小点。

证明　取

$$I = J = \varnothing, A_i = 0, a_i = 0, i \in I \cup J$$

由推论 1 立刻证得结论。　　证毕

文献[8]中也给出了问题($\mathrm{BQP_2}$)的一个全局最优充分性条件，如下。

引理 2[8]　设 $\bar{x} = (\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n)^{\mathrm{T}} \in U_B$，若

$$E(A)e \geqslant \bar{X}a + \bar{X}A\bar{x} \tag{7}$$

则 $\bar{x}$ 是问题($\mathrm{BQP_2}$)的全局极小点。

注 3　可以证明推论 3 推广了文献[8]中给出的条件(7)。事实上，如果引理 2 的条件(7)满足，取 $q = E(A)e, Q = diag(q)$，则 $A - Q \geqslant 0$，且容易证得(6)式成立。但反之不然，可以证明如下的问题(EP1)满足条件(6)，但不满足条件(7)。

$$(\mathrm{EP1})\ \min \frac{3}{2}x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t. } x \in \prod_{i=1}^{3} \{-1,1\}$$

令 $A = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，$a = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\bar{x} = (-1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$，

取 $Q = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，则 $A - Q \geqslant 0$，且 $\bar{X}(a + A\bar{x}) - Qe = 0 \leqslant 0$，即(6)式成立，由推论 3 知，$\bar{x}$ 是问题(EP1)的全局极小点。但 $E(A) = 1$，$\bar{X}a + \bar{X}A\bar{x} = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$，显然，(7)式不成立。

参考文献：

[1] JEYAKUMAR V, RUBINOV A M, WU Z Y. Sufficient Global Optimality Conditions for Non-convex Quadratic Optimization Problems with Box Constraints[J]. J Global Optim, 2006,36(3):471-481.

[2] WU Z Y, JEYAKUMAR V, RUBINOV A M. Sufficient Conditions for Global Optimality of Bivalent Nonconvex Quadratic Programs with Inequality Constraints[J]. J Optim Theory Appl, 2007, 133:123-130.

[3] WU Z Y. Sufficient Global Optimality Conditions for Weakly Convex Minimization Problems[J]. J Global Optim, 2007,39(3):427-440.

[4] JEYAKUMAR V, RUBINOV A M, WU Z Y. Non-convex Quadratic Minimization with Quadratic Constraints: Global Optimality Conditions[J]. Math Program (A), 2007, 110:521-541.

[5] RUBINOV A M, WU Z Y. Optimality Conditions in Global Optimization and Their Applications[EB/OL]. (2007-06-16) [2008-05-06]. http://springerlink. com/content/g73324127136w338/fulltext. pdf .

[6] 吴至友,白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2006, 23:1-5.

[7] 王丽. 一类非光滑广义凸多目标规划的最优性条件[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2005, 30(1):41-46.

[8] BECK A, TEBOUBLLE M. Global Optimality Conditions for Quadratic Optimization Problems with Binary Constraints[J]. SIAM J Optim, 2000,11:179-188.

[9] RUBINOV A M. Abstract Convexity and Global Optimization[M]. Dordrechet: Kluwer Academic Publishers, 2000.

Sufficient Global Optimality Conditions for Some Nonconvex Quadratic Program Problems with Quadratic Constraints

LI Guo-quan, WU Zhi-you

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper we study the global optimality conditions for some nonconvex quadratic program problems with quadratic constraints by using a new approach to establish sufficient global conditions suggested by Z. Y. Wu recently, and obtain some sufficient global optimality conditions for some nonconvex quadratic programs with quadratic constraints and derive some sufficient global optimality conditions of some nonconvex unconstrained quadratic programs at the same time. We also prove that, in some special cases, some results obtained in this paper are equivalent to the results in some references and even extend some corresponding results in some references in present information.

Key words: global optimality condition; L-subdifferential; quadratic program

(责任编辑 黄 颖)