运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20110516.1013.172

# 一类非可微多目标分式规划问题的混合对偶*

赵克全,唐莉萍
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

**摘要**:本文在高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性条件假设下,讨论了一类带支撑函数的不可微多目标分式规划的混合对偶模型(MD)$\max \varphi(y,\lambda,u)=(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$ 满足 $\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)=0,\mu^{\mathrm{T}}h(y)\geqslant 0,\forall y\in S,\lambda\in\mathbf{R}_{+}^{p},\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\mu\in\mathbf{R}_{+}^{p}$。对于该类混合对偶模型,本文首先证明了弱对偶定理是成立的。同时,在弱对偶定理的基础上,利用适当的约束规格建立了该类混合对偶模型的强对偶定理。

**关键词**:高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性;非可微多目标分式规划问题;弱有效解;混合对偶

**中图分类号**:O221.2;O172.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)03-0001-03

近年来,许多学者在各类广义凸性条件下研究了多目标分式规划问题的一些最优性必要和充分性条件以及对偶结果[1-16]。最近,陈秀宏等人在文献[12]中引入了一类新的广义凸性—高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性的定义,证明了高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性对商运算的封闭性,建立了高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性条件下的择一性定理。同时利用该择一性定理研究了带高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性的多目标分式规划问题的一些最优性充分条件和对偶结果。

本文在文献[9,12-13]的基础上,研究了高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性条件下一类带支撑函数的非可微多目标分式规划问题的混合对偶模型,在适当的假设条件下,证明了该类分式规划问题的混合对偶模型的弱对偶定理和强对偶定理。

## 1 预备知识

本文考虑如下的多目标分式规划问题

$$(\mathrm{MFP})\ \min \mathrm{G}(x)=([f_1(x)+s(x\mid C_1)]/g_1(x),\cdots,[f_p(x)+s(x\mid C_p)]/g_p(x))$$
$$\text{s.t. } h(x)=(h_1(x),\cdots,h_m(x))^{\mathrm{T}}\leqq 0,x\in C$$

$C\subseteq\mathbf{R}^n$ 为开凸集,$f_i:C\to\mathbf{R},g_i:C\to\mathbf{R}(i=1,\cdots,p),h_i:C\to\mathbf{R}(j\in J=\{1,\cdots,m\})$,假设$f_i(x)\geqslant 0,g_i(x)>0(i=1,\cdots,p)$定义(MFP)的可行解集为 $S=\{x\in C:h(x)\leqq 0\}$,$I(x_0)=\{j\in J:h_j(x_0)=0\}$。同时,$C_i(i=1,\cdots,p)$是 $\mathbf{R}^n$ 的紧凸集,$s(x\mid C_i)=\max\{\langle x,y\rangle:y\in C_i\}$,令 $k_i=s(x\mid C_i)(i=1,\cdots,p)$且 $k_i$ 是一个凸函数,$\partial k_i=\{w\in C_i:\langle w,x\rangle=s(x\mid C_i)\}$。

下面引入一些常见的记号。如果 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n,x=y\Leftrightarrow x_i=y_i,\forall i=1,\cdots,n;x<y\Leftrightarrow x_i<y_i,\forall i=1,\cdots,n;x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\forall i=1,\cdots,n;x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\forall i=1,\cdots,n$。这里至少存在一个 $j$ 使得 $x_i<y_i$。

**定义 1** $F:C\times C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为关于第三变量次线性,若$\forall x^1,x^2\in C$,且

1)$F(x^1,x^2;a^1+a^2)\leqslant F(x^1,x^2;a^1)+F(x^1,x^2;a^2),\forall a^1,a^2\in\mathbf{R}^n$;

2)$F(x^1,x^2;\alpha a)=\alpha F(x^1,x^2;a),\forall a\in\mathbf{R}^n$。

**定义 2**[12] 设$\phi:C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 可微,$F$ 关于第三变量次线性,$\rho\in\mathbf{R},d(\cdot,\cdot)$是伪度量。可微函数 $\Psi:C\to\mathbf{R}$ 称为在 $u\in C$ 关于 $\phi$ 的高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸,$\forall(x,p)\in C\times\mathbf{R}^n$,且

* 收稿日期:2010-05-31 修回日期:2010-12-27 网络出版时间:2011-05-16 10:13:00
资助项目:重庆师范大学青年基金(No.08XLQ01)
作者简介:赵克全,男,讲师,博士研究生,研究方向为多目标优化理论。

$$\Psi(x)-\Psi(u)\geqslant F(x,u,\alpha(x,u)[\nabla\Psi(u)+\nabla_p\phi(u,p)])+$$
$$\alpha(x,u)\{\phi(u,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\phi(u,p)]\}+pd^2(x,u)$$

其中 $\alpha:C\times C\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$。

**定义3**[12] $\bar{x}$ 称为(MFP)的有效解,若不存在另一个可行点使得 $G(x)\leqslant G(\bar{x})$。

**定义4**[12] $\bar{x}$ 称为(MFP)的弱有效解,若不存在另一个可行点使得 $G(x)<G(\bar{x})$。

## 2 混合类型对偶

对于一类非可微多目标分式规划问题(MFP),研究如下形式的混合对偶模型

$$(\mathrm{MD})\ \max\varphi(y,\lambda,u)=(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$$
$$\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)=0 \tag{1}$$
$$\mu^{\mathrm{T}}h(y)\geqslant 0,\forall y\in S \tag{2}$$
$$\lambda\in\mathbf{R}_+^p,\lambda^{\mathrm{T}}e=1,\mu=\mathbf{R}_+^p \tag{3}$$

效仿文献[12]中定理2.1的证明可得如下结论。

**定理1** 设 $f$ 和 $g:C\to\mathbf{R}^p$ 可微,$\forall x\in C,f(x)+\langle w,x\rangle\geqslant 0,g(x)>0,\phi:C\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是可微函数。若 $f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$ 和 $-g(\cdot)$ 在 $x_0\in C$ 关于同一函数 $\phi$ 是高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸。则$[f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle]/g(\cdot)$在 $x_0$ 关于 $\bar{\phi}$ 为高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸。其中

$$\bar{\alpha}(x,x_0)=\alpha(x,x_0)g(x_0)/g(x),\bar{\phi}(x_0,p)=[1/g(x_0)+(f(x_0)+\langle w,x_0\rangle)/g^2(x_0)]\phi(x_0,p)$$
$$\bar{d}(x,x_0)=[1/g(x)+(f(x_0)+\langle w,x_0\rangle)/g(x)g(x_0)]^{\frac{1}{2}}d(x,x_0)$$

**定理2** (弱对偶定理)设 $x$ 是(MFP)的一个可行解,$(y,\lambda,\mu)$是(MD)问题的可行解。若 $\lambda^{\mathrm{T}}[(f+w)/g]+\mu^{\mathrm{T}}h$ 在 $y$ 关于 $\phi$ 为高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸,其中

$$\phi(y,p)=rp^{\mathrm{T}}\{\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)\},(r\in\mathbf{R}),\rho\geqslant 0$$

则$(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)\not<(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$。

**证明** 假设$(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)<(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$,因为 $x$ 是(MFP)的可行解,故 $\mu^{\mathrm{T}}h(y)\leqslant 0$,所以

$$\lambda^{\mathrm{T}}(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)+\mu^{\mathrm{T}}h(x)e<\lambda^{\mathrm{T}}(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y) \tag{4}$$

由 $\lambda^{\mathrm{T}}(f+w)/g+\mu^{\mathrm{T}}h$ 在 $y$ 关于 $\phi$ 为高阶$(F,\alpha,\rho,d)$凸并结合(4)式可得

$$0>\lambda^{\mathrm{T}}(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)+\mu^{\mathrm{T}}h(x)-\lambda^{\mathrm{T}}(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)-\mu^{\mathrm{T}}h(y)\geqslant$$
$$F(x,y;\alpha(x,y)\{\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)+\nabla_p\phi(y,p)\})+$$
$$\alpha(x,y)\{\phi(y,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\phi(y,p)]\}+\rho d^2(x,y) \tag{5}$$

由 $\phi(y,p)=rp^{\mathrm{T}}[\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)],\rho>0$ 并结合(5)式可得

$$0>F(x,y;\alpha(x,y)(1+r)[\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)])$$

这与(1)式矛盾,因此$(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)\not<(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$。 证毕

**定理3** (弱对偶定理)设 $x$ 是(MFP)的一个可行解,$(y,\lambda,\mu)$是(MD)的可行解。若$f(\cdot)+\langle\cdot,w\rangle$和 $-g(\cdot)$在 $y$ 关于 $\phi$ 为高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸,$h(\cdot)$在 $y$ 关于 $\bar{\phi}'$为高阶$(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$-凸。其中

$$\bar{\phi}_i=rp^{\mathrm{T}}\nabla[(f_i+w_i)/g_i](x_0),(i=1,\cdots,p),\bar{\phi}_j'=rp^{\mathrm{T}}\nabla h_j(x_0),(j=1,\cdots,m),(r\in\mathbf{R})$$
$$\bar{\phi}(y,p)=[1/g(y)+(f(y)+\langle w,y\rangle)/g^2(y)]\phi(y,p),\bar{\alpha}=\alpha g(y)/g(y')$$
$$\bar{d}(y',y)=[1/g(y)+(f(y)+\langle w,y\rangle)/g^2(y)]^{\frac{1}{2}}d(y',y),\rho\geqslant 0$$

则$(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)\not<(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$。

**证明** 因为$f(\cdot)+\langle w,\cdot\rangle$和 $-g(\cdot)y$ 关于 $\phi$ 高阶$(F,\alpha,\rho,d)$-凸,根据定理1可以得到$(f(\cdot)+\langle\cdot,w\rangle)/g(\cdot)$在 $y$ 关于 $\phi$ 为高阶$(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$-凸。其中

$$\bar{\alpha}=\alpha(x,y)g(y)/g(x),\bar{\phi}(y,p)=[1/g(y)+(f(y)+\langle w,y\rangle)/g^2(y)]\phi(y,p)$$
$$\bar{d}(x,y)=[1/g(x)+(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(x)g(y)]^{\frac{1}{2}}d(x,y)$$

假设$(f(x)+\langle \omega,x\rangle)/g(x) < (f(y)+\langle \omega,y\rangle)/g(y)+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e$。

因为 $x$ 是(MFP)的可行解，故$\mu^{\mathrm{T}}h(y)\leqslant 0$，所以

$$(f(x)+\langle \omega,x\rangle)/g(x)-(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)-[\mu^{\mathrm{T}}h(x)e+\mu^{\mathrm{T}}h(y)e]<0 \tag{6}$$

由$(f+\omega)/g$ 在 $y$ 关于 $\phi$ 高阶$(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$-凸，$h(\cdot)$在 $y$ 关于 $\bar{\phi}'$为高阶$(F,\bar{\alpha},\rho,\bar{d})$-凸，于是

$$\begin{aligned}(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)-(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)\geqslant F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\{\nabla[(f+w)/g](y)+\nabla_p\phi(y,p)\})+\\ \bar{\alpha}(x,y)\{\bar{\phi}(y,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\bar{\phi}(y,p)]\}+\rho\bar{d}^2(x,y)\end{aligned} \tag{7}$$

$$h(x)-h(y)\geqslant F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\nabla h(y)+\nabla_p\bar{\phi}'(y,p))+\bar{\alpha}(x,y)\{\bar{\phi}'(y,p)-p^{\mathrm{T}}[\nabla_p\bar{\phi}'(y,p)]\}+\rho\bar{d}^2(x,y) \tag{8}$$

由 $\bar{\phi}(y,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)$，$\bar{\phi}'(y,p)=rp^{\mathrm{T}}\nabla h(y)$，$r\in\mathbf{R}$ 及(7)、(8)式得

$$(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)-(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)\geqslant F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\{(1+r)\nabla[(f+w)/g](y)\})+\rho\bar{d}^2(x,y)$$

$$h(x)-h(y)\geqslant F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)[(1+r)\nabla h(y)])+\bar{\alpha}(x,y)(1-r)\nabla h(y)$$

则

$$\begin{aligned}\lambda^{\mathrm{T}}[(f(x)+\langle w,x\rangle)/g(x)-(f(y)+\langle w,y\rangle)/g(y)]\geqslant\\ F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\{(1+r)\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)\})\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mu^{\mathrm{T}}[h(x)-h(y)]\geqslant F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)[(1+r)\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)]) \tag{10}$$

联立(6)式、(9)式和(10)式得

$$\begin{aligned}0>F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\{(1+r)\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)\})+F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)[(1+r)\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)])\geqslant\\ F(x,y;\bar{\alpha}(x,y)\{(1+r)\lambda^{\mathrm{T}}\nabla[(f+w)/g](y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla h(y)\})\end{aligned}$$

这与(1)式矛盾。　　证毕

**定理 4**　(强对偶定理)$\bar{x}$ 是(MFP)的一个可行解且满足文献[13]中的约束规格，则存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^p$，$\bar{\mu}\in\mathbf{R}_+^m$，$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$是(MD)问题的可行解，且如果弱对偶的条件满足，则$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$是(MD)的弱有效解且目标函数值相等。

**证明**　$\bar{x}$ 是(MFP)的一个可行解且满足文献[13]中的约束规格，则存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^p$，$\bar{\mu}\in\mathbf{R}_+^m$，$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$满足 Kuhn-Tucker 条件

$$\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}\nabla[(f+\langle w,\cdot\rangle)/g](\bar{x})+\bar{\mu}^{\mathrm{T}}\nabla h(\bar{x})=0,\ \bar{\mu}^{\mathrm{T}}\nabla h(\bar{x})=0$$

这蕴含着$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$是(MD)问题的可行解。

若$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$不是(MD)问题的弱有效解，则存在(MD)问题的一个可行解$(y,\lambda,\mu)$有

$$(f(\bar{x})+\langle w,\bar{x}\rangle)/g(\bar{x})=(f(\bar{x})+\langle w,\bar{x}\rangle)/g(\bar{x})+\mu^{\mathrm{T}}h(\bar{x})e<(f(u)+\langle w,u\rangle)/g(u)+\mu^{\mathrm{T}}h(u)e$$

这与弱对偶定理矛盾。　　证毕

## 参考文献：


[1] Bector C R., Chandra S, Husain I. Optimality conditions and subdifferentiable multiobjective fractional programming[J]. J Optim Theory Appl, 1993, 79: 105-125.

[2] Liu J C. Optimality and duality for multiobjective fractional programming involving nonsmooth pseudoinvex functions[J]. Optimization, 1996, 37: 27-39.

[3] Liu J C. Optimality and duality for multiobjective fractional programming involving nonsmooth $(F,\rho)$-convex functions[J]. Optimization, 1996, 36: 333-346.

[4] Kuk H, Lee G M, Tanino T. Optimality and duality for nonsmooth multiobjective fractional programming with generalized invexity[J]. J Math Anal Appl, 2001, 262: 365-375.

[5] Liang Z, Huang H, Pardalos P M. Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems[J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 611-619.

[6] Chen X H. Optimality and duality for the multiobjective fractional programming with the generalized $(F,\rho)$-convexity[J]. J Math Anal Appl, 2002, 273: 190-205.

[7] Preda V. Optimality and duality in fractional multiple objective programming involving semilocally preinvex and related functions[J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 365-382.

[8] Liang Z A, Huang H X, Pardalos P M. Efficient conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming[J]. J Glob Optim, 2003, 27: 447-471.

[9] Kim D S, Kim S J, Kim M H. Optimality and duality for a class of non-differentiable multiobjective fractional programming problems[J]. J Optim Theory Appl, 2006, 129: 131-146.

[10] Cristian N. Optimality and duality in multiobjective fractional programming involving-semilocally type I-preinvex and related functions[J]. J Math Anal Appl, 2007, 335, 7-19.

[11] Liu S M, Feng E M. Optimality conditions and duality for a class of nondifferentiable multi-objective fractional programming problems [J]. J Glob Optim, 2007, 38: 653-666.
[12] Chen X H. Sufficient conditions and duality for a class of multiobjective fractional programming problems with higher-order $(F,\alpha,\rho,d)$-convexity [J]. J Appl Math Comput, 2008, 28: 107-121.
[13] Preda V. On efficiency and duality for multiobjective programs [J]. J Math Anal Appl, 1992, 166: 365-377.
[14] 赵克全,罗杰,唐莉萍. 一类非光滑规划问题的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2010, 27(2): 1-3.
[15] 曾德胜,吴泽忠. $(F,\alpha,\rho,d)$-凸和广义$(F,\alpha,\rho,d)$-凸性下一类多目标规范问题的对偶[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2006, 29(1): 63-66.
[16] 周天刚. 多目标规划的对偶理论[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2001, 24(3): 242-245.

## Operations Research and Cybernetics

# The Mixed Duality of a Kind of Nondifferentiable Multiobjective Fractional Programming Problems

*ZHAO Ke-quan, TANG Li-ping*

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract**: In this paper, mixed dual model is considered for nondifferentiable multiobjective fractional programming problem with support function under high-order $(F,\alpha,\rho,d)$-convexity. The model as follows: (MD) $\max \varphi(y,\lambda,u) = (f(y) + \langle w,y\rangle)/g(y) + \mu^{\mathrm{T}} h(y) e$ such that $\lambda^{\mathrm{T}} \nabla[(f+w)/g](y) + \mu^{\mathrm{T}} \nabla h(y) = 0$, $\mu^{\mathrm{T}} h(y) \geqslant 0$, $\forall y \in S, \lambda \in \mathbf{R}^{p}_{+}, \lambda^{\mathrm{T}} e = 1, \mu \in \mathbf{R}^{p}_{+}$. Weak dual theorems are proved. At the same time, based on weak dual theorem, stong dual theorem is established under suitable constraint qualification for this kind of mixed dual model.

**Key words**: high-order $(F,\alpha,\rho,d)$-convexity; nondifferentiable multiobjective fractional programming problems; weakly efficient solution; mixed duality

(责任编辑 黄 颖)