DOI :CNKI :50-1165/N. 20110516. 1013. 181

# 具有可变输入率和不耐烦顾客 $M/M/n$ 的排队模型*

李　焕

(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

**摘要**:陆传赉在文献[1] 中研究了当系统中的队长为 $r$ 时,新来的顾客以概率 $\alpha_r = \frac{1}{(r+1)}$ 或 $\alpha_r = \frac{1}{(r+1)} - \frac{1}{(r+2)}$ 加入系统,即输入率为 $\lambda_r = \lambda\alpha_r$,服务率为 $\mu$ 的可变输入率的 $M/M/1$ 排队模型;以及当排队等待的队长为 $r$ 时,不耐烦顾客离开队伍的强度为 $\Delta_r = r\delta(\delta \geqslant 0)$ 的具有不耐烦顾客的 $M/M/n$ 排队模型;并得到了这两个系统的平稳分布以及主要指标。本文推广了文献[1] 的上述两个模型,把具有不耐烦顾客的 $M/M/n$ 排队模型和可变输入率的 $M/M/n$ 的排队模型进行了结合研究,即讨论了输入率可变同时具有不耐烦顾客的情况;考虑了输入率 $\lambda_r$ 和服务率 $\mu_r$ 都随队长 $r$ 变化的情况,即 $\begin{cases} \lambda_r = \lambda\alpha_r = \dfrac{\lambda}{1+r}, r = 0,1,2,\cdots \\ \mu_r = \begin{cases} r\mu, 0 \leqslant r \leqslant n \\ n\mu + \Delta_{r-n}, r > n \end{cases} \end{cases}$,建立了输入率可变且具有不耐烦顾客的 $M/M/n$ 排队模型,得到了模型的平稳分布以及各种指标,并举例说明了该模型在实际问题中的应用。

**关键词**:可变输入率;不耐烦顾客;$M/M/n$ 排队模型

**中图分类号**:O211. 6　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2011)03-0049-04

在日常生活中,经常可以看到顾客到达某系统时,发现因排队顾客较多,而发生犹豫的现象。究竟是否加入队列等候,除了顾客的需要外,还要考虑当时的队长,若队列较短,顾客加入队列的可能性就大,反之,顾客加入队列的可能性就小。关于具有不耐烦的排队模型和不同到达率的排队模型,已有很多学者进行了研究,并获得了不少成果。文献[1-4] 研究了具有不耐烦顾客的 $M/M/1$ 及 $M/M/n$ 排队模型。文献[5-8] 讨论了具有可变输入率方面的 $M/M/n$ 排队模型。然而,有关将不同到达率与具有不耐烦顾客相结合的排队模型还未得到关注。本文研究同时具有可变输入率与不耐烦顾客的 $M/M/n$ 排队模型。

## 1 模型假设

对于本排队模型,本文做以下假设。

1) 系统中有 $n$ 个服务窗,容量不限;

2) 服务窗工作独立,服务时间服从参数为 $\mu$ 的指数分布;

3) 顾客到达时,若队长为 $k$,则他加入队列的概率为 $\alpha_k = \frac{1}{1+k}$,不加入队列而离开的概率为 $1 - \alpha_k$;

4) 顾客到达间隔时间服从参数 $\lambda$ 的泊松分布;

5) 排队等待队长为 $k$ 时(此时系统中有 $n+k$ 个顾客),队伍中的不耐烦顾客离开队伍的强度为 $\beta_k = k^2\delta(\delta > 0)$。

## 2 数学模型

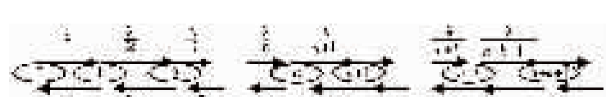
根据上述模型假设,类似文献[2] 的推导,有如下结论。

**定理 1**　令 $Z(t)$ 表示时刻 $t$ 系统内的顾客数(队长),则 $\{Z(t), t \geqslant 0\}$ 是状态空间 $E = \{0,1,2,\cdots,k,\cdots\}$,且

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda\alpha_k = \dfrac{\lambda}{1+k}, k = 0,1,2,\cdots \\ \mu_k = \begin{cases} k\mu, 0 \leqslant k \leqslant n \\ n\mu + \beta_{k-n}, k > n \end{cases} \end{cases}$$

的生灭过程。

于是,可画出系统状态流图



* 收稿日期:2010-11-03　修回日期:2011-03-21　网络出版时间:2011-05-16　10:13:00
作者简介:李焕,女,硕士研究生,研究方向为随机系统分析。

## 3 平稳分布

由以上数学模型,得到模型的平稳分布。

**定理2** 在上述生灭过程中,令

$$P_k(t) \hat{=} P\{X(t)=k\}, k=0,1,2,\cdots$$

$$P_k \hat{=} \lim_{t\to\infty} P\{X(t)=k\}, k=0,1,2,\cdots$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}, b=\frac{\delta}{\mu}, \rho_1=\frac{\rho}{n}, a=\frac{b}{n}$$

有

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{n^k\rho_1^k}{k!k!}p_0, 0\leqslant k\leqslant n\\ \dfrac{n^n\rho_1^k}{n!k!(1+a)(1+2^2a)\cdots[1+(k-n)^2a]}p_0, k>n\end{cases}$$

$$p_0=\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho_1)^k}{k!k!}+\frac{(n\rho_1)^n}{n!}\left[\frac{1}{n!}+\frac{n\rho_1}{(n+1)!(1+a)}+\frac{(n\rho_1)^2}{(n+1)!(1+a)(1+2^2a)}+\cdots+\frac{(n\rho_1)^l}{l!\prod_{l=1}^{k}(n+l^2a)}+\cdots\right]\right\}^{-1}$$

**证明** 由上图可列出平衡条件下的K氏代数方程,并求出其平稳分布,具体给出解析表达式。

对0状态:$\lambda p_0=\mu p_1 \Rightarrow p_1=\rho p_0$

对1状态:$\frac{\lambda}{2}p_1=2\mu p_2 \Rightarrow p_2=\frac{1}{2!2!}\rho^2 p_0$

对2状态:$\frac{\lambda}{3}p_2=3\mu p_3 \Rightarrow p_3=\frac{1}{3!3!}\rho^3 p_0$

$$\cdots$$

对$n-1$状态:

$$\frac{\lambda}{n}p_{n-1}=n\mu p_n \Rightarrow p_n=\frac{1}{n!n!}\rho^n p_0$$

对$n$状态:$\frac{\lambda}{n+1}p_n=(n\mu+\delta)p_{n+1}\Rightarrow$

$$p_{n+1}=\frac{1}{n!(n+1)!(n+b)}\rho^{n+1}p_0$$

对$n+1$状态:

$$\frac{\lambda}{n+2}p_{n+1}=(n\mu+2^2\delta)p_{n+2}\Rightarrow$$

$$p_{n+2}=\frac{1}{n!(n+2)!(n+b)(n+2^2b)}\rho^{n+1}p_0$$

一般地,对$n+k$状态:

$$p_{n+k}=\frac{1}{n!(n+k)!(n+b)(n+2^2b)\cdots(n+k^2b)}\cdot\rho^{n+k}p_0$$

则有

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k}{k!k!}p_0, 0\leqslant k\leqslant n\\ \dfrac{\rho^K}{n!k!(n+b)(n+2^2b)\cdots[n+(k-n)^2b]}p_0, k>n\end{cases}$$

再令$\rho_1=\frac{\rho}{n}, a=\frac{b}{n}$,则有

$$p_k=\begin{cases}\dfrac{n^k\rho_1^k}{k!k!}p_0, 0\leqslant k\leqslant n\\ \dfrac{n^n\rho_1^K}{n!k!(1+a)(1+2^2a)\cdots[1+(k-n)^2a]}p_0, k>n\end{cases}$$

再用正则性条件,$\sum_{n=0}^{\infty}p_n=1$,得到

$$p_0=\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\rho_1)^k}{k!k!}+\frac{(n\rho_1)^n}{n!}\left[\frac{1}{n!}+\frac{\rho_1}{(n+1)!(1+a)}+\frac{\rho_1^2}{(n+2)!(1+a)(1+2^2a)}+\cdots+\frac{\rho_1^l}{(n+l)!\prod_{s=1}^{l}(1+s^2a)}+\cdots\right]\right\}^{-1}$$

## 4 主要指标

根据平稳分布,得到如下主要数学指标。

1)顾客排队等待概率

$$p_{等}=\sum_{k=n}^{\infty}p_k=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n^n\rho_1^k}{n!k!(1+a)(1+2^2a)\cdots[1+(k-n)^2a]}p_0=\frac{(n\rho_1)^n}{n!}p_0\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\rho_1^{k-n}}{k!(1+a)(1+2^2a)\cdots[1+(k-n)^2a]}=\frac{(n\rho_1)^n}{n!}p_0\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\rho_1^{k-n}}{(l+n)!(1+a)(1+2^2a)\cdots(1+l^2a)}$$

2)平均等待队长(系统内排队等候的顾客的均值)

$$L_q=\sum_{k=0}^{\infty}kp_{k+n}$$

3)平均忙着的服务窗个数

$$L_{服}=\sum_{k=0}^{n-1}kp_k+\sum_{k=n}^{\infty}np_k=\sum_{k=0}^{n-1}k\frac{(n\rho_1)^k}{k!k!}p_0+n\left(1-\sum_{k=0}^{n-1}n\rho_k\right)=n\rho_1\sum_{k=0}^{n-1}k!\frac{(n\rho_1)k^{-1}}{(k-1)!}p_0+n\left(1-\sum_{k=0}^{n-1}n\rho_k\right)=n\rho_1\sum_{k=0}^{n-2}k!p_k+n-n\sum_{k=0}^{n-1}n\rho_k$$

4)平均队长(系统内顾客数的均值)

$$L_s=L_q+L_{服}=\sum_{k=0}^{\infty}kp_{k+n}+n\rho_1\sum_{k=0}^{n-2}k!p_k+n-n\sum_{k=0}^{n-1}n\rho_k$$

或

$$L_s=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k$$

5）单位时间内平均离开队列的不耐烦顾客数

$$L_l = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \delta p_{k+n}$$

6）绝对通过能力（单位时间内被服务完顾客的均值）

$$A = \lambda - L_l = \lambda - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \delta p_{k+n}$$

7）相对通过能力（单位时间内被服务完顾客数与请求服务的顾客数的比值）

$$Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - \frac{L_l}{\lambda}$$

8）由 Little 公式得到，顾客的平均等待时间 $W_q$ 和平均逗留时间 $W_s$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}, W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

## 5 实例分析

笔者以某理发店为例进行说明。在某理发店有 5 个理发师，顾客按平均每小时 6 人的泊松分布到达理发店，顾客到达的概率与当时店里的顾客人数成反比例关系，每位顾客的理发时间为指数分布，平均需要 30 min，当理发师都忙着时，正在排队的顾客就有可能发生犹豫，而离开队伍，顾客离开队伍的强度与平均等待队长成平方关系。

根据实例有，$\lambda = 6$，$\mu = \frac{60}{30} = 2$，$n = 5$，$\beta_k = k^2$，$\delta = 1$。则

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda\alpha_k = \dfrac{6}{1+k}, k = 0,1,2,\cdots \\ \mu_k = \begin{cases} 2k, 0 \leqslant k \leqslant 5 \\ 10 + k^2, k > 5 \end{cases} \end{cases}$$

根据定理1和定理2有，$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{2} = 3$，$b = \frac{\delta}{\mu} = \frac{1}{2}$，$\rho_1 = \frac{\rho}{n} = \frac{3}{5}$，$a = \frac{b}{n} = \frac{1}{10}$。

可以得到该系统的平稳分布

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{5^k\left(\frac{3}{5}\right)^k}{k!k!}p_0, 0 \leqslant k \leqslant 5 \\ \dfrac{5^k\left(\frac{3}{5}\right)^k}{5!k!\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{2^2}{10}\right)\cdots\left[1+(k-5)^2\frac{1}{10}\right]}p_0, k > 5 \end{cases}$$

可以得到主要的如下数学指标。

1）服务强度

$$\rho_1 = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu} = \frac{3}{5} = 0.6$$

2）系统空闲的概率

$$P_0 \approx 0.139\,6$$

从而可以得到

$$P_1 \approx 0.419\,1, P_2 \approx 0.314\,3, P_3 \approx 0.104\,7,$$
$$P_4 \approx 0.019\,5, P_5 \approx 0.002\,4, P_6 \approx 0.000\,3,$$
$$P_7 \approx 0.000\,1$$

3）顾客排队等待概率

$$p_{\text{等}} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{(n\rho_1)^k}{(k!)^2}P_0 \approx 0.018\,4$$

4）平均等待队长（系统内排队等候的顾客的均值）

$$L_q = \sum_{k=0}^{\infty} kp_{k+n} \approx 1.454\,3$$

5）平均忙着的服务窗个数

$$L_{\text{服}} = \sum_{k=0}^{n-1} kp_k + \sum_{k=n}^{\infty} np_k \approx 1.454\,4$$

6）平均队长（系统内顾客数的均值）

$$L_s = L_q + L_{\text{服}} = 2.908\,7$$

7）平均等待时间 $W_q$ 和平均逗留时间 $W_s$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \approx 0.484\,8, W_q = \frac{L_q}{\lambda} \approx 0.242\,4$$

通过以上的计算结果可知，在有 5 个理发师的理发店，5 位理发师平均忙着的概率为 60%，系统空闲（即无顾客理发）的概率约为 14%，顾客平均等待时间是 0.24 h，在店中平均逗留约为 0.48 h。

## 6 结束语

本文研究了具有可变输入率的不耐烦顾客的 $M/M/n$ 排队模型，并获得了该模型的平稳分布和主要指标，该模型可以帮助解决超市、银行、理发店等服务行业中的不同输入率以及不耐烦问题，从而推广了文献[1]中的结论，更接近于生活。

**参考文献：**


[1] 陆传赉. 排队论[M]. 北京:北京邮电学院出版社，1994.

[2] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京:清华大学出版社，2004.

[3] 孙荣恒，李建平. 排队论基础[M]. 北京:科学出版社，2002.

[4] 田铮，秦超英. 随机过程与应用[M]. 北京:科学出版社，2007.

[5] 台文志，高世泽. 一类具有可变输入率的 $M/M/1$ 排队模型[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版，2009，26(1):69-72.

[6] 刘宇民，李晓芬，王文霞，等. 具有可变输入率的 $M/M/n$ 模型的常微分方程形式[J]. 太原科技大学学报，2006，27(6):438-440.

[7] 仲彦军，张维娟. 具有可变输入率的 $M/M/n$ 模型的适定性及稳定性[J]. 信阳师范学院学报:自然科学版，2009，22(4):481-485.

[8] 侯冬倩，高世泽. 服务率可变且窗口能力不等的 $M/M/n$ 排队模型研究[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版，2010，27(2):46-48.

# The $M/M/n$ Queuing Model of Variable Input Rate and Impatient Customers

*LI Huan*

(Gollege of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract**: Lu Chuan-lai studied the $M/M/1$ queuing system with variable input rate when the new customer joined the system with the probability $\alpha_r = \frac{1}{(r+1)}$ or $\alpha_r = \frac{1}{(r+1)} - \frac{1}{(r+2)}$. Namely the input rate is $\lambda_r = \lambda\alpha_r$, and the service rate $u$ is a constant when the queue length is $r$ in the literature[1]. And studied the $M/M/n$ queuing system of impatient customers which the customers leave the intensity of troops is $\Delta_r = r\delta(\delta \geqslant 0)$. And the stable distribution and key indicators of the system is receied. In this paper, we generalize the above two models in [1]. This article is puts the queuing model with impatient customers and variable input rate combined queuing model. Namely this article studes the $M/M/n$ queuing system with variable input rate and impatient customers. We consider the situation which input rate and service rate with the change of captain $r$. That is $\begin{cases} \lambda_r = \lambda\alpha_r = \dfrac{\lambda}{1+r} & r = 0,1,2,\cdots \\ \mu_r = \begin{cases} r\mu, 0 \leqslant r \leqslant n \\ n\mu + \Delta_{r-n}, r > n \end{cases} & \end{cases}$. I established a queuing model with variable input rate of impatient customers and obtained the stable distribution and key indicators of the system. The article also illustrates the application of this model in practical problems .

**Key words**: variable input rate; patient customers; $M/M/n$ queuing model

(责任编辑 游中胜)