DOI:CNKI:50-1165/N. 20110707. 1744. 008

均质油藏非线性球向渗流问题解的相似结构*

许 丽，李顺初，盛翠翠
(西华大学 数学与计算机学院 应用数学研究所，成都 610039)

摘要：针对均质油藏球向渗流问题，在考虑井筒储集、井底定流量生产、3 种外边界(无穷大、定压、封闭)情形下，建立了考虑二次梯度影响的不稳定渗流的试井分析模型；先对此模型作线性化处理，把求解非线性的模型变为求解该线性的偏微分方程的定解问题，对定解问题关于时间 t_D 作 Laplace 变换得到线性的常微分的定解问题，求解此定解问题得到了线性化后的无因次储层压力和井底压力分布在 Laplace 空间中的精确解；经全面和深入分析，发现了此模型在 3 种外边界条件下解式之间的相同的结构式 $\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{C_Dz+1+\alpha+\frac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{1}{\Phi(1,z)}\Phi(r_D,z)$，只是对应不同边界条件的相似核函数 $\Phi(r_D,z)$ 不同。使得不同边界条件下对解的表达式之间的关系更加清晰，极大方便了相应的试井分析应用软件的编制，对油气藏渗流规律的理论研究也具有深远的意义。

关键词：相似结构；均质油藏；二次梯度项；不稳定；球向流
中图分类号：O29；O357. 3 文献标志码：A 文章编号：1672-6693(2011)04-0032-03

均质油藏模型的研究[1-5]构成了油气田开发工程及试井分析研究的最基础和最核心的内容之一，至今也是其理论与应用研究最为透彻和完善的一种储层模型，有关的研究主要针对径向流的模型。在实际开采油藏中往往也会遇到油层上部只有很小的层段被打开，那么流动区就有垂直流动分量，因而不能当成圆柱流动系统。垂直流动分量的存在引起半球流动系统的建立。本文研究的是考虑球向流[6]的均质储层。

近年兴起了微分方程(组)的解具有类似于实数可表示为连分式、图形具有相似性的所谓式相似性质(即解的相似结构)的研究[7-9]；又针对一些油藏模型[10-13]，归纳出了储层压力与井底压力在不同外边界条件的通用公式，即它们的解式具有统一的形式(即解式具有相同的结构)，不同的是对于不同的外边界条件有不同的所谓的相似核函数；并进一步讨论相似结构理论的应用，指明了相似结构对试井分析应用软件的编制具有指导意义，尤其对进一步研究油气藏的渗流规律带来了有益的促进作用。

目前考虑二次梯度项的均质球向流油藏模型研究[4]，没有对其解的相似结构进行研究。本文在均质球向流油藏的内边界条件中考虑井筒储集，建立了考虑二次梯度影响的不稳定渗流的模型[14]，并找到了 3 种外边界条件下渗流特征解式的相似结构，使得相似结构理论在考虑球向流的均质油藏领域得到进一步的推广。

1 非线性渗流模型的数学模型

考查均质油藏考虑井筒储集的球向流模型，假设：1) 开井前，油藏中各处压力均等于原始地层压力 p_i，开井后以定产量 q 生产；2) 产层厚度均匀且并未打开整个储层，流体是从各个方向流向一个共同的中心点；3) 流体微可压缩且服从等温达西定律；4) 忽略重力和毛管力的影响。根据以上假设，可建立如下的渗流数学模型。

基本微分方程[4]

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2}+\frac{2}{r_D}\frac{\partial P_D}{\partial r_D}-\alpha\left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)^2=\frac{\partial P_D}{\partial t_D}, t_D>0, r_D>1 \tag{1}$$

初始条件

$$P_D\big|_{t_D=0}=0 \tag{2}$$

内边界(井壁处)条件

* 收稿日期：2010-10-25 修回日期：2011-03-29 网络出版时间：2011-07-07 17:44:00
资助项目：西华大学应用数学重点学科资助(No. ZX00910-09-1)；西华大学创新基金(No. YCJJ200916)
作者简介：许丽，女，硕士研究生，研究方向为微分方程及其应用和渗流力学；通讯作者：李顺初，E-mail：lishunchu@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110707.1744.201104.32_008.html

$$\begin{cases} P_{wD}(t_D) = P_D(1,t_D), t_D > 0 \\ \left(C_D \dfrac{\mathrm{d}P_{wD}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)\Big|_{r_D=1} = 1, t_D > 0 \end{cases} \tag{3}$$

外边界条件

外边界无穷大时　$P_D\big|_{r_D\to\infty} = 0$　(4)

外边界定压时　$P_D\big|_{r_D=R_D} = 0$　(5)

外边界封闭时　$\dfrac{\partial P_D}{\partial r_D}\Big|_{r_D=R_D} = 0$　(6)

上述无量纲量(无因次化变量)的定义如下

$$P_{wD} = \frac{4\pi k r_w(p_i - p_w)}{\mu q}, P_D = \frac{4\pi k r_w}{\mu q}(p_i - p)$$

$$t_D = \frac{k}{\phi\mu(C_f + C_L)r_w^2}t, r_D = \frac{r}{r_w}, R_D = \frac{R}{r_w}$$

$$C_D = \frac{C}{4\pi\phi(C_f + C_L)r_w^3}, \alpha = \frac{\mu q}{4\pi k r_w}C_L$$

式中各字母含义及其单位如下:p 表示储层中任一点的压力,MPa;p_w 表示井壁(底)处的压力,MPa;p_i 表示原始地层压力,MPa;t 为时间,h;r 为储层中任一点距井心的距离,m;r_w 表示井筒半径,m;R 为外边界(圆形外边界)半径,m;q 为井底产量,m^3/d;μ 表示流体的粘度,mPa · s;C 表示井筒储集系数,m^3/MPa;C_L 表示流体的压缩系数,1/MPa;C_f 表示岩石的压缩系数,1/MPa;k 为流体的渗透率,μm^2;ϕ 表示有效孔隙度,无量纲;z 表示 Laplace 空间变量;下标 D 为无因次,w 为井底。

2 非线性渗流方程的线性化

为了使渗流基本微分方程(1)式线性化,即消去 $-\alpha\left(\dfrac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)^2$ 项,作如下变量替换,令

$$P_D(r_D,t_D) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{y}{r_D}\right), y = y(r_D,t_D)$$

$$P_{wD}(t_D) = -\frac{1}{\alpha}\ln(1 + y_w), y_w = y_w(t_D)$$

这样,渗流定解问题(1)~(6)式可化为如下线性形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial r_D^2} = \dfrac{\partial y}{\partial t_D} \\ y\big|_{t_D=0} = 0 \\ C_D = \dfrac{\mathrm{d}y(1,t_D)}{\mathrm{d}t_D} - \left[\dfrac{\partial y}{\partial r_D} - (1+\alpha)y\right]\Big|_{r_D=1} = -\alpha \\ \lim\limits_{r_D\to\infty} y = 0, \text{或}\ y(R_D,t_D) = 0, \text{或}\left(r_D\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r_D} - y\right)\Big|_{r_D=R_D} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

3 数学模型的求解

对定解问题(7)式关于 t_D 作 Laplace 变换[15] 并化简得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{y}}{\mathrm{d}r_D^2} - z\bar{y} = 0 & (8) \\ \left[(C_D z + 1 + \alpha)\bar{y} - \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D}\right]\Big|_{r_D=1} = -\dfrac{\alpha}{z} & (9) \\ \lim\limits_{r_D\to\infty}\bar{y} = 0, \text{或}\ \bar{y}\big|_{r_D\to R_D} = 0, \text{或}\left(r_D\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D} - \bar{y}\right)\Big|_{r_D=R_D} = 0 & (10) \end{cases}$$

方程(8)式的通解为

$$\bar{y}(r_D,z) = Ae^{\sqrt{z}r_D} + Be^{-\sqrt{z}r_D} \tag{11}$$

其中 A,B 为任意常数,求特解时由边界条件(9),(10)式确定。经简单的计算分析解得结构,不难得到在 3 种外边界条件下模型线性化后的 Laplace 空间解均有如下相同的表达形式。

$$\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{C_D z + 1 + \alpha + \dfrac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{1}{\Phi(1,z)}\Phi(r_D,z) \tag{12}$$

对应不同边界条件下的相似核函数 $\Phi(r_D,z)$ 为

$$\Phi(r_D,z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\sqrt{z}(r_D-1)}}{\sqrt{z}}, \bar{y}(\infty,z) = 0 \\ \dfrac{\sinh\sqrt{z}(R_D - r_D)}{\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}(R_D - 1)}, \bar{y}(R_D,z) = 0 \\ \dfrac{R_D\sqrt{z}\cosh\sqrt{z}(R_D - r_D) - \sinh\sqrt{z}(R_D - r_D)}{\sqrt{z}[R_D\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}(R_D - 1) - \cosh\sqrt{z}(R_D - 1)]}, \left(r_D\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D} - \bar{y}\right)\Big|_{r_D=R_D} = 0 \end{cases}$$

由(12)式知,无因次井底压力线性化后的 Laplace 空间解为

$$\bar{y}_w(z) = \bar{y}(1,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{C_D z + 1 + \alpha + \dfrac{1}{\Phi(1,z)}} \tag{13}$$

此式可经 Laplace 反(演)变换[15] 而得到 $y_w(t_D) = L^{-1}[\bar{y}_w(z)]$,从而一步得到无因次井底压力的解为

$$P_{wD}(t_D) = P_D(1,t_D) = -\frac{1}{\alpha}\ln[1 + y_w(t_D)],$$
$$y_w(t_D) = y(1 - t_D) \tag{14}$$

4 结论和认识

1)可通过对所求得的线性化后的模型的 Laplace 空间解进行解析反演,得到相应的实空间的解析解,从而求得储层压力和井底压力分布的解析解。但解析解没有类似的简洁的通式。

2)实用中可采用 Laplace 数值反演(Stehfest 数值反演公式[16]),求得相应的实空间的数值解,再由

(14)式求得无因次井底压力,完全可以满足试井分析中的应用需要。

3)若把实测压力数据无因次化,再代入 $P_D = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{y}{r_D}\right)$,可得到线性化后的模型解 y 的值,再作 Laplace 数值变换,得到线性化后的模型 Laplace 空间解的值,就可直接在 Laplace 空间中进行试井分析(压力动态分析)等各项工作,这将更加体现出本文所得通式的优越性,极大地方便了试井分析软件的编制,简化和优化软件结构。

参考文献:

[1] 李顺初,李晓平,黄炳光,等. 均质油藏储层压力动态解得综合研究[J]. 钻井工艺,2002,25(1):50-51.

[2] 李顺初,刘德华,张普斋. 均质油藏在不同边界条件下的压力分布[J]. 江汉石油学院学报,2001,23(2):16-17.

[3] 李晓平,张烈辉,刘启国. 试井分析方法[M]. 北京:石油工业出版社,2009.

[4] 同登科,陈钦雷,廖新维,等. 非线性渗流力学[M]. 北京:石油工业出版社,2003.

[5] 张晓丽,李顺初,朱维兵. 三种典型油藏的类型判别研究[J]. 西华大学学报:自然科学版,2008,25(1):19-20.

[6] 李晓平. 地下油气渗流力学[M]. 北京:石油工业出版社,2007.

[7] 李顺初. 二阶常系数齐次线性微分方程边值问题的解的相似结构[J]. 西华大学学报:自然科学版,2007,26(1):84-85.

[8] 李顺初,伊良忠,郑鹏社. 微分方程定解问题解的相似结构[J]. 四川大学学报:自然科学版,2006,43(4):933-934.

[9] 李全勇,李顺初,迟颖. 常系数齐次微分方程组边值问题解的相似结构[J]. 四川兵工学报,2010,25(1):50-52.

[10] 李顺初,郑鹏社,张宇飞. 均质油藏试井分析解的相似结构[J]. 西华大学学报:自然科学版,2006,22(4):460-463.

[11] 李顺初,郑天璞,徐英. 分形均质外边界封闭油藏的试井分析模型解[J]. 重庆大学学报:自然科学版,2003,26:130-131.

[12] 李顺初,郑天璞. 分形均质无穷大油藏的试井分析模型解[J]. 东北师范大学学报:自然科学版,2004,36(5):125-126.

[13] 郑天璞,李顺初. 分形均质外边界定压油藏的试井分析模型解[J]. 吉林大学学报:工学版,2004,34(7):102-103.

[14] 曹绪龙,同登科,王瑞和. 考虑二次梯度项影响的非线性不稳定渗流问题的精确解[J]. 应用数学和力学,2004,25(1):93-99.

[15] 李顺初,黄炳光. Laplace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M]. 北京:石油工业出版社,2000.

[16] Horald S. Numerical inversion of Laplace transforms [J]. Communications of the ACM,1970,13(1):47-49.

Similar Structure of Flow Effective Well Radius Model through Homogeneous Reservoir Solutions

XU Li, LI Shun-chu, SHENG Cui-cui

(Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: This article suggests a spherical seepage problem in the homogeneous reservoir, considering well bore storage, bottom hole fixed flow and the three types of outer boundary (infinite, constant pressure and closed) cases, an instability seepage model was established in well testing analysis with consideration of the quadratic gradient. First, model was linearized, obtained linear partial boundary value of second-order differential equation. Further by using Laplace to transform to the time t_D to get the ordinary differential equation boundary value problem. The linearized model obtained the exact solutions of the dimensionless reservoir and dimensionless bottom-hole pressure in Laplace space; the similar structure of the solution's form in three kinds of outer boundary conditions is achieved through a comprehensive and in-deep analysis of its characteristics. Can be expressed in the following general formula $\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{C_D z + 1 + \alpha + \frac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{1}{\Phi(1,z)}\Phi(r_D,z)$. There are only different kernel functions $\Phi(r_D,z)$ behind different boundary conditions. That made the relationship between the expressions of the solution more clearly. The research is convenient to design the corresponding application software for well test analysis, and also has a profound significance in the percolation theory of oil and gas law.

Key words: similar structure; homogeneous reservoir; quadratic gradient term; instability; spherical flow

(责任编辑 黄 颖)