DOI :CNKI :50-1165/N. 20110707. 1744. 009

一类非线性传染率的 SIRI 模型的稳定性*

郭 鹏,杨志春
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘要:考虑具有非线性及时滞的传染率为 $\varphi(S)I(t-\tau)$ 的 SIRI 传染病模型的动力学行为

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\varphi\left(\dfrac{b}{d}-I-R\right)I(t-\tau)-(\gamma+d)I+\alpha I\\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I-(d+\alpha)R\end{cases}$$

首先,借助于 Dulac 函数和线性化方法,获得无时滞情形($\tau=0$)的各个平衡点的全局稳定性;其次,应用线性化系统的方法证明系统的局部稳定性;最后,利用 Lyapunov 泛函方法研究无病平衡点的全局稳定性得到结论,推广了 H. N. Moreira & Yuquan Wang 所做的工作。

关键词:SIRI 模型;非线性传染率;时滞;稳定性
中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)04-0035-05

1990 年,D. Tudor[1] 提出 SIRI 模型,它包括 3 个部分,易感人群(S),已感人群(I)以及恢复人群(R)。1997 年,H. N. Moreira & Y. Wang[2] 研究了具有一般传染率 $\varphi(S)I$ 的 SIRI 模型,模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=b-\varphi(S)I-dS\\ \dfrac{dI}{dt}=\varphi(S)I-(\gamma+d)I+\alpha R\\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I-(\alpha+d)R\end{cases}\tag{1}$$

由于易感者感染后要经过一段时间后才能感染别人,所以考虑下列具有时滞情形的模型

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=b-\varphi(S)I(t-\tau)-dS\\ \dfrac{dI}{dt}=\varphi(S)I(t-\tau)-(\gamma+d)I+\alpha R\\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I-(\alpha+d)R\end{cases}\tag{2}$$

其中,b 表示出生率,d 表示死亡率,γ 为恢复率,α 为免疫失去率,b,d,γ,α 都为正常数,以及 $\varphi>0$ 且 $\varphi'>0$。

首先,根据文献[3-6],将系统(2)转化为下列二维极限方程

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\varphi\left(\dfrac{b}{d}-I-R\right)I(t-\tau)-(\gamma+d)I+\alpha I\\ \dfrac{dR}{dt}=\gamma I-(d+\alpha)R\end{cases}\tag{3}$$

根据文献[3-6],系统(2)的平衡点的存在性及稳定性都可以通过系统(3)来研究。显然,有下列结论。

引理 1 $S_{\triangle}=\left\{(I,R)\mid I\geqslant0,R\geqslant0,I+R\leqslant\dfrac{b}{d}\right\}$为系统(3)的正不变集。

* 收稿日期:2011-04-23 网络出版时间:2011-07-07 17:44:00
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971240);重庆市自然科学基金(No. CSTC2008BB2364);重庆市教委科研项目(No. KJ080806)
作者简介:郭鹏,男,硕士研究生,研究方向为微分方程与动力系统;通讯作者:杨志春,E-mail:zhichy@yahoo.com.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110707.1744.201104.35_009.html

根据文献[7],容易求出系统(3)的基本再生数为

$$\mathfrak{R}_0=\frac{(d+\alpha)\varphi\left(\frac{b}{d}\right)}{d(d+\alpha+\gamma)} \tag{4}$$

由基本再生数,得到下列关于系统(3)平衡点存在及其唯一性的结论。

引理2 当$\mathfrak{R}_0\leqslant 1$,系统(3)仅有唯一的平衡点$E_0=(0,0)$;当$\mathfrak{R}_0>1$时,系统除了平衡点$E_0$外,还有正平衡点$E_*=(I_*,R_*)$,这里$I_*>0,R_*>0$,以及满足下列方程组

$$\begin{cases}\varphi(\frac{b}{d}-I_*-R_*)I_*-(\gamma+d)I_*+\alpha I_*=0\\ \gamma I_*-(d+\alpha)R_*=0\end{cases} \tag{5}$$

以后,称平衡点E_0为无病平衡点,称平衡点E_*为地方病平衡点。

利用不同于 H. N. Moreira & Yuquan Wang[2] 的方法研究系统(3)时滞情形(即$\tau=0$)平衡点的局部稳定性和全局稳定性,进一步研究时滞系统(3)平衡点的局部稳定性和无疾平衡点的全局稳定性,结论推广了 H. N. Moreira & Yuquan Wang[2] 所做的工作。

1 无时滞情形($\tau=0$)时的阀值动力学

本文考虑系统(3)无时滞的情形,模型为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varphi(\frac{b}{d}-I-R)I-(\gamma+d)I+\alpha R\triangleq P(I,R)\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(d+\alpha)R\triangleq Q(I,R)\end{cases} \tag{6}$$

文献[2]将系统(6)进行了 Liénard 变换,从而构造出 Lyapunov 函数。下面,直接线性化其系统,根据线性矩阵特征根的正负从而考虑系统(6)平衡点的局部渐近稳定,再构造 Dulac 函数证明其全局稳定性。

首先,对系统(6)线性化,有如下结论。

引理3 当$\mathfrak{R}_0<1$,系统(6)的无病平衡点E_0局部渐近稳定;当$\mathfrak{R}_0>1$时,无病平衡点E_0不稳定,地方病平衡点E_*局部渐近稳定。

证明 很容易求得系统(6)在E_0处的线性化矩阵为

$$M_0=\begin{pmatrix}\varphi(\frac{b}{d})-(\gamma+d) & \alpha\\ \gamma & -(d+\alpha)\end{pmatrix}$$

计算M_0的行列式值和迹,有

$$\det M_0=-\varphi\left(\frac{b}{d}\right)(d+\alpha)+(\gamma+d)(d+\alpha)-\alpha\gamma=\alpha(d+\alpha+\gamma)(1-\mathfrak{R}_0)$$

$$\operatorname{tr} M_0=\varphi\left(\frac{b}{d}\right)-(\gamma+d)-(d+\alpha)<\varphi\left(\frac{b}{d}\right)\frac{d+\alpha}{d}-(d+\alpha+\gamma)-d=(d+\alpha+\gamma)(\mathfrak{R}_0-1)-d$$

显然,当$\mathfrak{R}_0<1$时,$\det M_0>0$,$\operatorname{tr} M_0>0$,无病平衡点E_0局部渐近稳定;当$\mathfrak{R}_0>1$时,$\det M_0<0$,无病平衡点E_0不稳定。

当$\mathfrak{R}_0>1$地方病平衡点E_*存在。在E_*处的线性化矩阵为

$$M_*=\begin{pmatrix}M_{*1} & M_{*2}\\ \gamma & -(d+\alpha)\end{pmatrix}$$

其中

$$M_{*1}=-\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*+\varphi\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)-(\gamma+d),M_{*2}=-\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*+\alpha$$

计算M_*的行列式值和迹,得

$$\det M_*=-M_{*1}(d+\alpha)-M_{*2}\cdot\gamma=\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)(d+\alpha)I_*+\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)\gamma I_*>0$$

$$\operatorname{tr} M_* = M_{*1} - (d+\alpha) = -\varphi'\left(\frac{b}{d} - I_* - R_*\right) - (d+\alpha) - \frac{\alpha\gamma}{d+\alpha} < 0$$

所以，当$\mathfrak{R}_0 > 1$ 时，地方病平衡点 E_* 局部渐近稳定。　　证毕

现在，考虑平衡点的全局稳定，为此，先引入一个引理 4。

引理 4　系统(6)在第一象限内不存在极限环和包含有限个平衡点的奇异闭轨线。

证明　先证明此引理在 $S_\triangle$ 内成立。选取 Dulac 函数为

$$D(I,R) = I^{-1}R^{-1}$$

且

$$\frac{\partial(DP)}{\partial I} + \frac{\partial(DQ)}{\partial R} = -\varphi'\left(\frac{b}{d} - I_* - R_*\right)R^{-1} - \alpha I^{-2} - \gamma R^{-2} < 0$$

因此系统(6)在 $S_\triangle$ 内不存在极限环和包含有限个平衡点的奇异闭轨线，又由引理 1，系统(6)在第一象限内不存在极限环和包含有限个平衡点的奇异闭轨线。　　证毕

由引理 4，显然有下列结论成立。

引理 5　当$\mathfrak{R}_0 < 1$ 时，系统(6)无病平衡点 E_0 全局渐近稳定；当$\mathfrak{R}_0 > 1$ 时，无病平衡点 E_0 不稳定，地方病平衡点 E_* 全局渐近稳定。

现在考虑$\mathfrak{R}_0 = 1$ 的情形。令 $Q(I,R) = 0$，得到 $R = \frac{\gamma}{d+\alpha}I$，代入 $P(I,R)$，得到

$$\phi(I) \triangleq -2\varphi'\left(\frac{b}{d}\right)I^2 + o(I^2))$$

根据文献[8-9]，E_0 是一个鞍-结点，且在第一象限是全局渐近稳定。　　证毕

由引理 3 ~ 5，可以得出下面结论。

定理 1　当$\mathfrak{R}_0 \leqslant 1$ 时，系统(6)无病平衡点 E_0 全局渐近稳定；当$\mathfrak{R}_0 > 1$ 时，无病平衡点 E_0 不稳定，地方病平衡点 E_* 全局渐近稳定。

2 时滞情形的稳定性分析

本节主要研究无病平衡点的全局渐近稳定性，以及地方病平衡点的局部稳定。

首先，给出关于无病平衡点稳定性的定理。

定理 2　当$\mathfrak{R}_0 \leqslant 1$ 时，系统(3)的无病平衡点 E_0 全局渐近稳定；当$\mathfrak{R}_0 > 1$ 时，无病平衡点 E_0 不稳定。

证明　在 E_0 处线性化系统(3)，得到特征方程为

$$\det(\lambda I - M_{01} - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}M_{02}) = 0 \tag{7}$$

其中

$$M_{01} = \begin{pmatrix} -(\gamma+d) & \alpha \\ \gamma & -(d+\alpha) \end{pmatrix},\quad M_{02} = \begin{pmatrix} \varphi\left(\frac{b}{d}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将系统(7)展开，得到

$$\lambda^2 + (\gamma + \alpha + 2d)\lambda + d(d+\alpha+\gamma) = \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\varphi\left(\frac{b}{d}\right)(\lambda + d + \alpha) \tag{8}$$

由引理 3 以及系统(8)关于参数 τ 的连续依赖性可知，当$\mathfrak{R}_0 < 1$，$0 < \tau \triangleq 1$ 时，$\lambda < 0$。假设存在 τ_0，系统(8)存在一对共轭虚根 $\lambda = \pm \mathrm{i}\omega$，$\omega > 0$，分离实部和虚部，得到

$$\begin{cases} \varphi\left(\frac{b}{d}\right)((d+\alpha)\cos\omega\tau_0 + \omega\sin\omega\tau_0) = -\omega^2 + d(d+\alpha+\gamma) \\ \varphi\left(\frac{b}{d}\right)(\omega\cos\omega\tau_0 + (d+\alpha)\sin\omega\tau_0) = (\gamma+\alpha+2d)\omega \end{cases}$$

整理，得

$$\omega^4 + D_1\omega^2 + D_2 = 0 \tag{9}$$

其中

$$D_1=(\gamma+\alpha+2d)^2-2d(d+\alpha+\gamma)-\varphi^2\left(\frac{b}{d}\right)=\left(\gamma+\alpha+d+\varphi\left(\frac{b}{d}\right)\right)\left(\gamma+\alpha+d-\varphi\left(\frac{b}{d}\right)\right)+d^2$$

$$D_2=d^2(d+\alpha+\gamma)^2-\varphi^2\left(\frac{b}{d}\right)=\left(d(d+\alpha+\gamma)+\varphi\left(\frac{b}{d}\right)(d+\alpha)\right)d(d+\alpha+\gamma)(1-\mathfrak{R}_0)$$

若$\mathfrak{R}_0<1$,D_1,$D_2>0$,则系统(9)没有实根。因此,系统(8)的所有根实部为负。同理可知,若$\mathfrak{R}_0=1$,系统(8)仅有一个零根,而其余的根实部非负。而当$\mathfrak{R}_0>1$,$D_2<0$,因此系统(8)至少有一个正根。所以,当$\mathfrak{R}_0\leqslant 1$ 时,系统(3)的无病平衡点 E_0 局部渐近稳定;当$\mathfrak{R}_0>1$ 时,无病平衡点 E_0 不稳定。

现在研究 E_0 的全局稳定性,构造 Lyapunov 泛函,得

$$V(I,R)=I+\frac{\alpha}{d+\alpha}R+\varphi\left(\frac{b}{d}\right)\int_{t-\tau}^{t}I(u)\,\mathrm{d}u \tag{10}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\varphi\left(\frac{b}{d}-I-R\right)I(t-\tau)-(\gamma+d)I+\alpha R+\frac{\alpha}{d+\alpha}(\gamma I-(d+\alpha)R)+\varphi\left(\frac{b}{d}\right)I-$$

$$\varphi\left(\frac{b}{d}\right)I(t-\tau)=\left(\varphi\left(\frac{b}{d}-I-R\right)-\varphi\left(\frac{b}{d}\right)\right)+\frac{d(d+\alpha+\gamma)}{d+\alpha}(\mathfrak{R}_0-1)I\leqslant 0$$

又因为 $I=0$ 不是系统(3)的解,因此由 Lyapunov-Lasalle 不变原理可知,当$\mathfrak{R}_0\leqslant 1$ 时,E_0 全局渐近稳定。 证毕

现在,考虑 E_* 的稳定性。

定理 3 当$\mathfrak{R}_0>1$ 时,地方病平衡点 E_* 局部渐近稳定。

证明 在 E_* 处线性化系统(3),得到特征方程为

$$\det(\lambda I-M_{11}-\mathrm{e}^{-\lambda\tau}M_{12})=0$$

其中

$$M_{11}=\begin{pmatrix}-\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*-(\gamma+d) & -\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*+\alpha\\ \gamma & -(d+\alpha)\end{pmatrix},M_{12}=\begin{pmatrix}\varphi\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

展开得

$$\lambda^2+A_1\lambda+A_2=\mathrm{e}^{-\lambda\tau}A_3(\lambda+A_4) \tag{11}$$

这里

$$A_1=\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*+(\gamma+\alpha+2d),A_2=\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)(d+\alpha+\gamma)I_*+d(d+\alpha+\gamma)$$

$$A_3=\varphi\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right),A_4=d+\alpha$$

由引理 3 以及系统(11)关于参数 τ 的连续依赖性可知,当$\mathfrak{R}_0>1$,$0<\tau\triangleq 1$ 时,$\lambda<0$。假设存在 τ_0,系统(11)存在一对共轭虚根 $\lambda=\pm\mathrm{i}\omega$,$\omega>0$,分离实部和虚部,得到

$$\begin{cases}A_3A_4\cos\omega\tau_0+A_3\omega\sin\omega\tau_0=-\omega^2+A_2\\ A_3A_4\sin\omega\tau_0+A_3\omega\cos\omega\tau_0=A_1\omega\end{cases}$$

整理,得

$$\omega^4+(A_1^2-A_3^2-2A_2)\omega^2+(A_2^2-A_3^2A_4^2)=0 \tag{12}$$

根据引理 3,有 $A_2-A_3A_4>0$,因此 $A_2^2-A_3^2A_4^2>0$。

因为

$$A_1^2-A_3^2-2A_2=\left(\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*+(\gamma+\alpha+2d)\right)^2-\varphi^2\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)-$$

$$2\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)(\gamma+\alpha+d)I_*-2d(\gamma+\alpha+d)=\varphi'\left(\frac{b}{d}-I_*-R_*\right)I_*^2+$$

$$2d\varphi'\left(\frac{b}{d} - I_* - R_*\right) + (\gamma + \alpha + d)^2 + d^2 - \left(\frac{d(d + \alpha + \gamma)}{d + \alpha}\right)^2 > 0$$

因此，不存在这样的实数ω，使得系统（12）成立，故满足系统（11）的λ都具有负实部。所以E_*局部渐近稳定。 证毕

参考文献：

[1] Tudor D. A deterministic model for herpes infections in human and animal populations[J]. SIAM Rev, 1990(32): 136-139.

[2] Moreira H N, Wang Y Q. Global stability in an S→I→R→I model[J]. SIAM Rev, 1997(39): 196-502.

[3] Ruan S, Wang W. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. J Differential Equations, 2003(188): 135-163.

[4] Wang Z W, Wang W D, Wang X L. Bifurcation analysis of a model of cell-to-cell spread of HIV-1 with two distributed delays[J]. 西南大学学报：自然科学版, 2007, 29(2): 015-021.

[5] 杨志春. Volterra 型脉冲积分微分方程解的存在性和稳定性[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版, 2008, 25(1): 1-4.

[6] Xiao D, Ruan S. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate[J]. Math Biosci, 2007(208): 419-429.

[7] Driessche P V D, Watmough J. Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Math Biosci, 2002(180): 29-48.

[8] Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z, et al. Qualitative theory of differential equations[M]. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.

[9] Perko L. Differential equations and dynamical systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1996.

The Stability of SIRI Model with Nonlinear Incidence Rate

GUO Peng, YANG Zhi-chun

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we consider dynamical behaviors of an SIRI epidemic model with nonlinear incidence rate and delay situation

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \varphi\left(\dfrac{b}{d} - I - R\right) I(t-\tau) - (\gamma + d) I + \alpha I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - (d + \alpha) R \end{cases}$$

Firstly, By employing the Dulac function and the method of linearization of this equations of each equilibrium, we obtain the global stability of each equilibrium without delay. Secondly, by using the method of linearization of this equations, we prove the local stability of each equilibrium for the systems with delay. Finally, by Lyapunov functional we derive global stability of the disease-free equilibrium.

Key words: SIRI model; nonlinear incidence rate; delay; stability

（责任编辑 游中胜）