DOI:CNKI:50-1165/N.20110707.1744.010

关于 k 折对称点的正系数解析函数类的几个性质*

傅秀莲[1],刘 芳[2]
(1. 广东工贸职业技术学院 计算机系;2. 人事处,广州 510510)

摘要:引入了两类关于 k 折对称点的具有正系数的解析函数类 $M(k,\alpha)$ 和 $N(k,\alpha)$,利用式子 $f_k(\varepsilon^\mu z)=\varepsilon^\mu f_k(z)$,$\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{zf'(\varepsilon^\mu z)}{f_k(z)}=\frac{zf'_k(z)}{f_k(z)}$ 和复分析中的一些方法得到了包含关系;通过计算并利用级数性质得到这两类函数的系数不等式的充分条件;利用引理得到这两类函数的系数不等式的必要条件;最后利用系数不等式得到增长定理、凸的线性关系等,得到了准确的结果。

关键词:解析函数;包含关系;系数不等式;增长定理;凸的线性关系
中图分类号:O174.51 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2011)04-0040-04

用 A 来表示在单位圆 $U=\{z:|z|<1\}$ 内解析,且具有如下形式的泰勒展开式

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \tag{1}$$

的函数 f 构成的函数族。S 表示 A 中的单叶函数子族。用 $S^*(\alpha)$,$C(\alpha)$ 分别表示通常的 α 级星像函数类和 α 级凸像函数类,它们都是 S 的子类,分别满足不等式 $\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\alpha$ 和 $\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}>\alpha$,其中 $0\leqslant\alpha<1$。用 P 来表示在单位圆 $U=\{z:|z|<1\}$ 内解析且满足条件 $P(0)=1$,$\mathrm{Re}P(z)>0$ 的全体函数所构成的函数族。用 M 表示 S 中且具有如下形式的泰勒展开式

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\ (a_n\geqslant 0) \tag{2}$$

的子族。

本文介绍了两类关于 k 折对称点的函数族,得到了一些结果。

定义 1 设 $1<\alpha<2$,若 $f(z)\in M$ 且满足

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}<\alpha \tag{3}$$

则称 $f(z)\in M(\alpha)$。

若 $f(z)$ 满足

$$\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{f'(z)}<\alpha \tag{4}$$

则称 $f(z)\in N(\alpha)$。

定义 2 设 $1<\alpha<2$,若 $f(z)\in M$ 且满足

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f_k(z)}<\alpha \tag{5}$$

则称 $f(z)\in M(k,\alpha)$。

若 $f(z)$ 满足

$$\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{f'_k(z)}<\alpha \tag{6}$$

则称 $f(z)\in N(k,\alpha)$。其中

$$f_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\varepsilon^{-\nu}f(\varepsilon^\nu z),\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

显然有 $M(1,\alpha)\equiv M(\alpha)$,$N(1,\alpha)\equiv N(\alpha)$。$M(\alpha)$,$N(\alpha)$ 见文献[1]。

对于单位圆内的解析函数类的性质,国内外的许多学者进行了研究。特别对于其中函数的泰勒展开式的系数是负数时,有许多这方面的工作[1-4]。对于函数的泰勒展开式的系数是正数的解析函数类,文献[5-10]也有相关的研究。本文引入了一类具有正系数的解析函数类,研究它的包含关系、系数不等式、增长定理、凸的线性关系等问题,得到了一些准确的结果。

为了定理的证明,这里先介绍一个相关的引理。

引理 1[11] $p(z)\in P\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$,其中函数 $\varphi(z)$ 在 $U=\{z:|z|<1\}$ 上解析,且满足 $\varphi(0)=0$,$|\varphi(z)|<1$。

* 收稿日期:2010-12-14 修回日期:2011-05-30 网络出版时间:2011-07-07 17:44:00
作者简介:傅秀莲,女,讲师,硕士,研究方向为复分析及其应用。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110707.1744.201104.40_010.html

2 主要结果及证明

定理 1　若 $f(z)\in M(k,\alpha)$,则 $f_k(z)\in M(\alpha)$。

证明　若 $f(z)\in M(k,\alpha)$,则有

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f_k(z)}<\alpha \tag{7}$$

在(7)式中用 $\varepsilon^{\mu}z$ 代替 z,其中 $\mu=0,1,2,\cdots,k-1$,可得

$$\mathrm{Re}\frac{\varepsilon^{\mu}zf'(\varepsilon^{\mu}z)}{f_k(\varepsilon^{\mu}z)}<\alpha \tag{8}$$

因为 $f_k(\varepsilon^{\mu}z)=\varepsilon^{\mu}f_k(z)$,则(8)式可化为

$$\mathrm{Re}\frac{zf'(\varepsilon^{\mu}z)}{f_k(z)}<\alpha \tag{9}$$

在(9)式中令 $\mu=0,1,2,\cdots,k-1$,并相加可得

$$\mathrm{Re}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{zf'(\varepsilon^{\mu}z)}{f_k(z)}<k\alpha$$

即

$$\mathrm{Re}\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{zf'(\varepsilon^{\mu}z)}{f_k(z)}<\alpha$$

又因为 $\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{zf'(\varepsilon^{\mu}z)}{f_k(z)}=\frac{zf'_k(z)}{f_k(z)}$,所以有 $\mathrm{Re}\frac{zf'_k(z)}{f_k(z)}<\alpha$,即 $f_k(z)\in M(\alpha)$。

用类似的方法可得下面的定理。

定理 2　若 $f(z)\in N(k,\alpha)$,则 $f_k(z)\in N(\alpha)$。

定理 3　(系数不等式)设 $f(z)\in M$,则 $f(z)\in M(k,\alpha)$ 的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(nk+1)-\alpha]a_{nk+1}+\sum_{n=2,n\neq lk+1}^{\infty}na_n\leqslant\alpha-1 \tag{10}$$

证明　设 $f(z)\in M$,且 $f(z)\in M(k,\alpha)$,则对于任意 $z\in U$,有 $\mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f_k(z)}<\alpha$。即对于任意 $z\in U$,有 $\mathrm{Re}\left\{\alpha-\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right\}>0$。记

$$f_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\varepsilon^{-\nu}f(\varepsilon^{\nu}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n$$

其中 $b_n=\frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\varepsilon^{(n-1)\nu}(\varepsilon^k=1)$。即

$$0<\mathrm{Re}\left\{\alpha-\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right\}\Big|_{z=r}=\frac{\alpha-1+\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha b_n-n)a_nr^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nr^{n-1}}$$

所以

$$\alpha-1+\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha b_n-n)a_nr^{n-1}>0$$

即

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)a_nr^{n-1}\leqslant\alpha-1$$

令 $m\geqslant 2$ 及 $0<r<1$,则

$$\sum_{n=2}^{m}(n-\alpha b_n)a_nr^{n-1}\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)a_nr^{n-1}\leqslant\alpha-1$$

令 $r\to 1^-$,则 $\sum_{n=2}^{m}(n-\alpha b_n)a_n\leqslant\alpha-1$。

再令 $m\to\infty$ 可得

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)a_n\leqslant\alpha-1 \tag{11}$$

从 b_n 的定义有 $b_n=\begin{cases}1,n=lk+1,\\0,n\neq lk+1,\end{cases}(n\geqslant 2,k,l\geqslant 1)$。

把上式代入(11)式可得(10)式。当 $f_n(z)=z+\frac{\alpha-1}{(n-\alpha b_n)a_n}z^n$ 时(10)式取等号。

反过来,假设(10)式成立,则对于任意 $z\in U$,令

$$h(z)=\frac{zf'(z)}{f_k(z)}=\frac{z+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n}=\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^{n-1}}$$

$$p(z)=\frac{\alpha-h(z)}{\alpha-1}$$

则 $p(0)=1$,且对于任意 $z\in U$,存在

$$\varphi(z)=\frac{1-h(z)}{2\alpha-1-h(z)}$$

使得 $p(z)=\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$,且 $\varphi(0)=0$

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{1-h(z)}{2\alpha-1-h(z)}\right|=\left|\frac{1-\dfrac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^{n-1}}}{2\alpha-1-\dfrac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^{n-1}}}\right|=$$

$$\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(a_nb_n-na_n)z^{n-1}}{2(\alpha-1)(1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1})-1-\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}\right|=$$

$$\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(a_nb_n-na_n)z^{n-1}}{2(\alpha-1)+\sum_{n=2}^{\infty}(2(\alpha-1)a_nb_n-na_n)z^{n-1}}\right|<1$$

所以由引理 1 可得 $p(z)\in P$,即 $\mathrm{Re}\,p(z)>0$,

即

$$\mathrm{Re}\frac{\alpha-h(z)}{\alpha-1}>0$$

因此

$$\mathrm{Re}\,h(z)<\alpha$$

故 $f(z)\in M(k,\alpha)$。　　证毕

推论1 设$f(z)\in M$,且$f(z)\in M(k,\alpha)$,则$a_n\leqslant\frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}(n\geqslant 2)$,当$f_n(z)=z+\frac{\alpha-1}{(n-\alpha b_n)a_n}z^n$时等号成立。

用同样的方法可得定理4和推论2。

定理4 (系数不等式)设$f(z)\in M$,则$f(z)\in N(k,\alpha)$的充要条件为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nk+1)[(nk+1)-\alpha]a_{nk+1}+\sum_{n=2,n\neq lk+1}^{\infty}n^2a_n\leqslant\alpha-1$$

推论2 设$f(z)\in M$,且$f(z)\in N(k,\alpha)$,则

$$a_n\leqslant\frac{\alpha-1}{n(n-\alpha b_n)}(n\geqslant 2)$$

当$f_n(z)=z+\frac{\alpha-1}{n(n-\alpha b_n)a_n}z^n$时等号成立。

定理5 (增长定理)设$f(z)\in M$,$f(z)\in M(k,\alpha)$,则对于任意$z\in U$,有

$$|z|-\frac{\alpha-1}{2-\alpha}|z|^2\leqslant|f(z)|\leqslant|z|+\frac{\alpha-1}{2-\alpha}|z|^2$$

极值函数为$f(z)=z+\frac{\alpha-1}{2-\alpha}z^2$。

证明 根据定理3可得

$$(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)a_n\leqslant\alpha-1$$

所以有$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\leqslant\frac{\alpha-1}{2-\alpha}$。

所以 $$|f(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n|\geqslant$$

$$|z|-\sum_{n=2}^{\infty}a_n|z|^n\geqslant|z|-|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n\geqslant$$

$$|z|-\frac{\alpha-1}{2-\alpha}|z|^2$$

$$|f(z)|=|z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n|\leqslant|z|+\sum_{n=2}^{\infty}a_n|z|^n\leqslant$$

$$|z|+|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n\leqslant|z|+\frac{\alpha-1}{2-\alpha}|z|^2$$ 证毕

推论3 设$f(z)\in M$,$f(z)\in M(k,\alpha)$,则

$$\left\{z:|z|<1-\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right\}\subset f(U)\subset\left\{z:|z|<1+\frac{\alpha-1}{2-\alpha}\right\}$$

用同样的方法可以证明定理6和推论4。

定理6 (增长定理)设$f(z)\in M$,$f(z)\in N(k,\alpha)$,则对于任意$z\in U$,有

$$|z|-\frac{\alpha-1}{2(2-\alpha)}|z|^2\leqslant$$

$$|f(z)|\leqslant|z|+\frac{\alpha-1}{2(2-\alpha)}|z|^2$$

极值函数为$f(z)=z+\frac{\alpha-1}{2(2-\alpha)}z^2$。

推论4 设$f(z)\in M$,$f(z)\in N(k,\alpha)$,则

$$\left\{z:|z|<1-\frac{\alpha-1}{2(2-\alpha)}\right\}\subset$$

$$f(U)\subset\left\{z:|z|<1+\frac{\alpha-1}{2(2-\alpha)}\right\}$$

定理7 (凸的线性关系)设

$$f_i(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n,i}z^n(a_{n,i}\geqslant 0,n\geqslant 2,i=1,2,\cdots,\nu)$$

且$f_i(z)\in M(k,\alpha)$,则对于函数

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\nu}d_if_i(z)(d_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{\nu}d_i=1)$$

有$h(z)\in M(k,\alpha)$。

证明 由$f_i(z)$的$h(z)$定义可得

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\nu}d_if_i(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n$$

其中$c_n=\sum_{i=1}^{\nu}d_ia_{n,i}(n=2,3,\cdots)$。

因为$f_i(z)\in M(k,\alpha)(i=1,2,\cdots,\nu)$,所以由定理3可得,对于所有的$i=1,2,\cdots,\nu$,有

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)a_{n,i}\leqslant\alpha-1$$

所以 $$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)c_n=\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n)\sum_{i=1}^{\nu}d_ia_{n,i}=$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}d_i(\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha b_n))a_{n,i}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}d_i(\alpha-1)\leqslant(\alpha-1)\sum_{i=1}^{\nu}d_i=\alpha-1$$

所以由定理3可得$h(z)\in M(k,\alpha)$。 证毕

在定理7中令$\nu=2$可得推论5。

推论5 函数类$M(k,\alpha)$是凸集。

用同样的方法可得定理8和推论6。

定理8 (凸的线性关系)设

$$f_i(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n,i}z^n(a_{n,i}\geqslant 0,n\geqslant 2,i=1,2,\cdots,\nu)$$

且$f_i(z)\in N(k,\alpha)$,则对于函数

$$h(z)=\sum_{i=1}^{\nu}d_if_i(z)(d_i\geqslant 0,\sum_{i=1}^{\nu}d_i=1)$$

有$h(z)\in N(k,\alpha)$。

推论6 函数类$N(k,\alpha)$是凸集。

定理9 设$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n(a_n\geqslant 0)$令

$$f_1(z)=z,f_n(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}z^n(n\geqslant 2)$$

则$f(z)\in M(k,\alpha)$当且仅当存在$\lambda_n\geqslant 0$,$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=1$,使得$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_nf_n(z)$。

证明 若存在 $\lambda_n \geqslant 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$，使得 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$，则

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}\lambda_n z^n$$

因此有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha b_n}{\alpha-1}\times\frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}\lambda_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n = 1-\lambda_1 \leqslant 1$$

由定理 3 可得 $f(z) \in M(k,\alpha)$。

反之，若 $f(z) \in M(k,\alpha)$，则由推论 1 可得 $a_n \leqslant \frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}(n \geqslant 2)$。

令 $\lambda_n = \frac{n-\alpha b_n}{\alpha-1}a_n$，$\lambda_1 = 1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n$，则

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n =$$

$$z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha-1}{n-\alpha b_n}\lambda_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n(z-f_n(z)) =$$

$$\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n\right)z + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n f_n(z)$$ 证毕

用同样的方法可得定理 10。

定理 10 设 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n (a_n \geqslant 0)$，令

$$f_1(z) = z, f_n(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha-1}{n(n-\alpha b_n)}z^n (n \geqslant 2)$$

则 $f(z) \in N(k,\alpha)$ 当且仅当存在 $\mu_n \geqslant 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n = 1$，使得 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n f_n(z)$。

参考文献：

[1] Owa S, Nishiwaki J. Coefficient estimates for certain classes of analytic functions[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2002,3(5):72-78.

[2] Ekrem Kadioglu. On Subclass of Univalent Functions with Negative Coefficients[J]. Applied Mathematics and Computation,2003,146:351-358.

[3] Liu Ming-Sheng, Zhu Yu-Can, Srivastava H M. Properties and characteristics of certain subclasses of starlike functions of order[J]. Math Computer Modelling,2008,48:402-419.

[4] 叶中秋. 解析函数的系数[J]. 江西师范大学学报：自然科学版,1998(3):217-221.

[5] 洪敏，傅秀莲. 正系数解析函数的一类新子族[J]. 华南师范大学学报：自然科学版,2010,2:14-17.

[6] 刘志文，刘名生. 某类解析函数子类的性质与特征[J]. 华南师范大学学报：自然科学版,2010,3:11-14.

[7] 王欢. 一类新的解析函数族[J]. 湖北大学学报：自然科学版,2010,32(2):117-120.

[8] 刘名生，崔志锋. 一类解析函数子类的 Fekete-Szeg 不等式[J]. 华南师范大学学报：自然科学版,2010,1:1-4.

[9] 洪敏. 某一类正系数解析函数研究[J]. 重庆文理学院学报：自然科学版,2010,2:25-28.

[10] 赵翠新，敖恩. 具有正系数和缺系数的算子解析函数类[J]. 高等数学研究,2008,11(1):58-59.

[11] Graham I, Kohr G. Geometric function theory in one and higher dimensions[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 2003.

Some Qualities of Analytic Functions with Positive Coefficients with Respect to *k* Symmetric Points

FU Xiu-lian[1], *LIU Fang*[2]

(1. Computer Science Department; 2. Staff Department Guangdong College of Industry and Commerce, Guangzhou 510510, China)

Abstract: Two new classes of analytic functions with positive coefficients, $M(k,\alpha)$ and $N(k,\alpha)$ are introduced. Using some methods in complex analysis, the inclusion relations are obtained by the formulas $f_k(\varepsilon^\mu z) = \varepsilon^\mu f_k(z)$ and $\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{zf'(\varepsilon^\mu z)}{f_k(z)} = \frac{zf'_k(z)}{f_k(z)}$. By some calculations and using series properties, sufficient conditions of coefficients inequality are obtained. Using lemma 1 necessary conditions of coefficients inequality are obtained. Further, growth theorems, convex linear relations for the class are investigated by coefficients inequality. The results are accurate.

Key words: analytic function; inclusion relations; coefficients estimates; growth theorems; convex linear relations

（责任编辑 黄 颖）