运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20111110.1503.001

强 G-预不变凸函数*

彭再云[1],房效亮[1],赵 勇[1,2]
(1. 重庆交通大学 理学院,重庆 400074;2. 重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:本文给出了一类新的广义凸函数—强 G-预不变凸函数,它是一类重要的广义凸函数,它是强预不变凸函数的真推广。首先,用例子证明了强 G-预不变凸函数的存在性,并举例说明它区别于 G-预不变凸函数、严格 G-预不变凸函数;然后,给出了强 G-预不变凸函数的 3 个基本性质定理;最后还给出了 G-预不变凸函数是强 G-预不变凸函数的一个充分条件,即令 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,且 η 满足条件 C,如果 f 是 G-预不变凸函数,且 $\exists\alpha>0$,使得 $\forall x,y\in K$ 和 $\bar{\lambda}\in[0,1]$ 有 $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar{\lambda}G(f(x))+(1-\bar{\lambda})G(f(y))-\alpha\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2]$。那么,$f:K\to\mathbf{R}$ 是 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的关于 η 的强 G-预不变凸函数。

关键词:不变凸集;强 G-预不变凸函数;G-预不变凸函数;严格 G-预不变凸函数
中图分类号:O221.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2011)06-0001-04

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。在 1981 年,Hanson 和 Craven 提出了一类广义凸函数—不变凸函数,并且 Craven 利用它们建立了分式规划的对偶原理;1988 年,Weir 和 Mond 在文献[1]中提出一类广义凸函数—预不变凸函数,它是不变凸函数的推广形式;1995 年,Mohan 和 Neogy 证明了在条件 C 下,不变凸函数是预不变凸函数,不变拟凸函数是预不变拟凸函数;2005 年,颜丽佳和刘芙萍在文献[2]中又提出了一类特殊的预不变凸函数—强预不变凸函数,讨论了它与强不变凸函数之间的关系,另外还给出了它的一些基本性质和等价命题;2007 年,Antczak 在文献[3]中提出一类广义凸函数—G-预不变凸函数,它是预不变凸函数的推广,并给出了 G-预不变凸函数的一些基本性质和判定方法;在此之后,一些学者对强预不变凸函数进行了大量深入的研究[4-11]。

在文献[2,9,11]的启发下,本文提出了一类新的广义凸函数—强 G-预不变凸函数,它是强预不变凸函数的推广。用例子说明了强 G-预不变凸函数的存在性,并说明它是区别于 G-预不变凸函数、严格 G-预不变凸函数的一类新的广义凸函数;然后,给出了强 G-预不变凸函数的 3 个基本性质定理;最后还给出了 G-预不变凸函数是强 G-预不变凸函数的一个充分条件。

1 基本知识与例子

为了后面讨论的需要,先给出如下的定义。

定义 1[1] 集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是不变凸集,若存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$,$y+\lambda\eta(x,y)\in K$。

定义 2[2] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$,如果存在常数 $\beta>0$,使得 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$ 满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2$$

则称函数 f 是强预不变凸函数。

定义 3[3] 设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,函数 $f:K\to\mathbf{R}$,如果存在连续递增函数

---

* 收稿日期:2011-07-05 网络出版时间:2011-11-10 15:03

资助项目:国家青年基金资助项目(No. 11001287);重庆市科委研究项目(No. CSTC2011AC6104;No. 2010BB9254);重庆市教委科研基金(No. KJ100419)

作者简介:彭再云,男,讲师,博士研究生,研究方向为最优化理论与应用。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20111110.1503.201106.1_001.html

$G: I_f(K)\to\mathbf{R}$,对于$\forall x,y\in K$, $\lambda\in[0,1]$满足

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))$$

则称f是K上关于η的G-预不变凸函数。

注1 定义3中如果$\forall x,y\in K(x\neq y)$,$\forall\lambda\in(0,1)$使得公式严格成立,则称它是$K$上关于$\eta$的严格$G$-预不变凸函数。

条件C[4] 称函数$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$满足条件C,如果对$\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

条件D[4] 设集合$K\subset\mathbf{R}^n$是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,对于函数$f:K\to\mathbf{R}$有

$$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x),\forall x,y\in K$$

则称f满足条件D。

定义4 设集合$K\subset\mathbf{R}^n$是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,函数$f:K\to\mathbf{R}$,如果存在连续递增函数$G: I_f(K)\to\mathbf{R}$和常数$\beta>0$,对于$\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

则称f是K上关于η的强G-预不变凸函数。

强G-预不变凸函数是普遍存在的,下面给出例1说明其存在性。

例1 令$K=(-\infty,+\infty)$,$f(x)=\ln[(|x|-1)^2+1]$,$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, x\geqslant0, y\geqslant0 \text{ 或 } x<0, y<0\\ -x-y, x\geqslant0, y<0 \text{ 或 } x>0, y\leqslant0\end{cases}$,$G(t)=e^t$,则存在$\beta=1$使得$f$是关于$\eta$的强$G$-预不变凸函数。

分析 不难验证,对于$\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in[0,1]$,当$\beta=1$时有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

由强G-预不变凸函数的定义,显然f是K上关于η的强G-预不变凸函数。

注2 例1说明了强G-预不变凸函数的存在性。显然还可以知道,当$G(t)=t$时强G-预不变凸函数就退化成是强预不变凸函数。

下面用例2和例3说明强G-预不变凸函数是不同于G-预不变凸函数、严格G-预不变凸函数的一类新的广义凸函数。

例2 令$K=(-\infty,+\infty)$,$G(t)=\tan(t)$,$t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, xy\geq0\\ -y-x, xy<0\end{cases}$,$f(x)=\arctan(|x|)$。由定义3,很容易得到$f$是$K$上关于$\eta$的$G$-预不变凸函数,但对$\forall\beta>0$,令$x=-1$,$y=2$,$\lambda=\frac{1}{2}$,可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))>G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

所以f不是关于η的强G-预不变凸函数。

例3 令$K=(0,6]$,$G(t)=e^t$,$f(x)=\ln 3$,$\eta(x,y)=0$,由定义4可以得到f是K上的强G-预不变凸函数。但令$x=1$,$y=2(x\neq y)$,$\lambda=\frac{1}{2}$时,可得

$$G[f(y+\lambda\eta(x,y))]=3=\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))=3$$

即

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=G^{-1}(\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y)))$$

因此,f不是K上的关于同一η的严格G-预不变凸函数。

2 强G-预不变凸函数的性质与判定

在这一节中,将介绍一些强G-预不变凸函数的一些基本性质。

说明:若一个实值函数G满足$G(x+y)=G(x)+G(y)$,x,y在该函数的定义域中,则称函数G满足可加性;若一个实值函数G满足$G(kx)=kG(x)$,x在该函数的定义域中,$k>0$,则称函数G满足正齐次性。

定理1 令K是关于$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的不变凸集,$f,g:K\to\mathbf{R}$是关于同一$\eta$和$G$的强$G$-预不变凸函数,

若 G^{-1}和 G 满足可加性,则$f+g$ 也是关于同一 η 的强 G-预不变凸函数。

证明　因为f,g 是两个关于同一 η 和 G 的强 G-预不变凸函数,故存在常数 $\beta_1>0,\beta_2>0$, $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,使得下面 2 个不等式成立

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta_1\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

$$g(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(g(x))+(1-\lambda)G(g(y))-\beta_2\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

则有

$$(f+g)(y+\lambda\eta(x,y))=f(y+\lambda\eta(x,y))+g(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant$$
$$G^{-1}[\lambda G((f+g)(x))+(1-\lambda)G((f+g)(y))-(\beta_1+\beta_2)\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

故$f+g$ 是关于 η 的强 G-预不变凸函数。　　证毕

定理 2　假设$f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的强 G-预不变凸函数,α 是一常数,若 G^{-1}和 G 满足可加性,则$f+\alpha$ 也是关于 η 强 G-预不变凸函数。

证明　因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的强 G-预不变凸函数,故存在一个常数 $\beta>0$,和连续实值增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$,对 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

于是可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))+\alpha\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]+\alpha=$$
$$G^{-1}[\lambda G(f(x)+\alpha)+(1-\lambda)G(f(y)+\alpha)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

所以$f+\alpha$ 是关于 η 的强 G-预不变凸函数。　　证毕

定理 3　令 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的强 G-预不变凸函数,$k>0$,若 G^{-1}和 G 满足正齐次性,则 kf 也是关于 η 的强 G-预不变凸函数。

证明　因为 $f:K\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的强 G-预不变凸函数,故存在一个常数 $\beta>0$,连续的实值增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$,对 $\forall x,y\in K$, $\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]\tag{1}$$

由(1)式及 G^{-1}和 G 的正齐次性可得

$$kf(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant kG^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]=$$
$$G^{-1}[\lambda G(kf(x))+(1-\lambda)G(kf(y))-\beta k\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]=$$
$$G^{-1}[\lambda G(kf(x))+(1-\lambda)G(kf(y))-\beta'\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$$

其中 $\beta'=k\beta$。所以 kf 也是关于 η 的强 G-预不变凸函数。　　证毕

在文献[11]中有如下的关于强预不变凸函数的判定定理。

定理 4[11]　设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,η 满足条件 C,函数$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上关于 η 的强预不变凸函数当且仅当f 在 K 上关于 η 的预不变凸函数,且存在常数 $\lambda\in(0,1)$和 $\beta>0$,使得$f(x)\neq f(y)$时恒有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2,\ \forall x,y\in K$$

成立。

现将上述结论从强预不变凸情形推广到强 G-预不变凸情形,给出强 G-预不变凸函数的一个判定定理。

定理 5　令 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集,且 η 满足条件 C,如果f 是 G-预不变凸函数,且 $\exists\alpha>0$,使得 $\forall x,y\in K$ 和 $\bar{\lambda}\in[0,1]$有

$$f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar{\lambda}G(f(x))+(1-\bar{\lambda})G(f(y))-\alpha\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(x,y)\|^2]\tag{2}$$

那么$f:K\to\mathbf{R}$ 是 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上关于 η 的强 G-预不变凸函数。

证明　由条件,假定$f:K\to\mathbf{R}$ 不是一个强 G-预不变凸函数,那么对 $\forall\beta>0$, $\exists x,y\in K$ 和 $\exists\lambda\in[0,1]$,使得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))>G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]\tag{3}$$

选择 γ_1,γ_2 满足 $0<\gamma_1<\lambda<\gamma_2<1$, $\lambda=\bar{\lambda}\gamma_1+(1-\bar{\lambda})\gamma_2$。

令 $\bar{x}=y+\gamma_1\eta(x,y)$, $\bar{y}=y+\gamma_2\eta(x,y)$,由$f$ 是 G-预不变凸函数,可以得到

$$f(\bar{x})\leqslant G^{-1}[\gamma_1 G(f(x))+(1-\gamma_1)G(f(y))],f(\bar{y})\leqslant G^{-1}[\gamma_2 G(f(x))+(1-\gamma_2)G(f(y))] \tag{4}$$

由条件C可以得到

$$\begin{aligned}\bar{y}+\bar{\lambda}\eta(\bar{x},\bar{y})&=y+\gamma_2\eta(x,y)+\bar{\lambda}\eta(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_2\eta(x,y))=\\ &y+\gamma_2\eta(x,y)+\bar{\lambda}\eta(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_1\eta(x,y)+(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y))=\\ &y+\gamma_2\eta(x,y)+\bar{\lambda}\eta\left(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_1\eta(x,y)+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y))\right)=\\ &y+\gamma_2\eta(x,y)-\bar{\lambda}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y))=y+(\gamma_2-\bar{\lambda}(\gamma_2-\gamma_1))\eta(x,y)=y+\lambda\eta(x,y)\end{aligned} \tag{5}$$

由(2)式可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(\bar{y}+\bar{\lambda}\eta(\bar{x},\bar{y}))\leqslant G^{-1}[\bar{\lambda}G(f(\bar{x}))+(1-\bar{\lambda})G(f(\bar{y}))-\alpha\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})\|\eta(\bar{x},\bar{y})\|^2] \tag{6}$$

又由条件C可得

$$\begin{aligned}\eta(\bar{x},\bar{y})&=\eta(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_2\eta(x,y))=\eta(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_1\eta(x,y)+(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y))=\\ &\eta\left(y+\gamma_1\eta(x,y),y+\gamma_1\eta(x,y)+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y))\right)=\\ &-\frac{\gamma_2-\gamma_1}{1-\gamma_1}\eta(x,y+\gamma_1\eta(x,y))=-(\gamma_2-\gamma_1)\eta(x,y)\end{aligned} \tag{7}$$

因此由(5)~(7)式可得

$$\begin{aligned}&f(y+\lambda\eta(x,y))=f(\bar{y}+\bar{\lambda}\eta(\bar{x},\bar{y}))\leqslant\\ &G^{-1}[\bar{\lambda}G(f(\bar{x}))+(1-\bar{\lambda})G(f(\bar{y}))-\alpha\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda})(\gamma_2-\gamma_1)^2\ \|\eta(\bar{x},\bar{y})\|^2]\leqslant\\ &G^{-1}\left[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\alpha\frac{(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)}{(\gamma_2-\gamma_1)^2}(\gamma_2-\gamma_1)^2\ \|\eta(x,y)\|^2\right]=\\ &G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\alpha(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]=\\ &G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]\end{aligned}$$

其中$\beta=\dfrac{(\lambda-\gamma_2)(\gamma_1-\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}>0$,与(3)式矛盾,所以$f$是$K\subseteq\mathbf{R}^n$上关于$\eta$的强$G$-预不变凸函数。　　证毕

注3　定理5给出了G-预不变凸函数是强G-预不变凸函数的一个充分性定理,定理中(2)式是至关重要的,下面用例4说明(2)式这一条件是不可缺的。

例4　令$K=(-\infty,+\infty)$,$G(t)=\tan(t)$,$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,$f(x)=\arctan(|x|)$,$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,xy\geq 0\\ -y-x,xy<0\end{cases}$,由定义3很容易证明$f$是$K$上的$G$-预不变凸函数,但对$\forall\beta>0$,令$x=-1$,$y=2$,$\lambda=1/2$,可得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=\arctan\frac{3}{2}>$$

$$G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))-\beta\lambda(1-\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]=\arctan\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\beta\right)$$

因此,f不是关于η的强G-预不变凸函数。

参考文献:

[1] Weir T,Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. J Math Anal Appl,1988,136:29-38.

[2] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2005,22:11-15.

[3] Antczak T. G-preinvex functions in mathmatica programming[J]. J Comput Appl Math,2007,217:212-226.

[4] Luo H Z,Wu H X. On the relationships between G-preinvex functions and semistrictly G-preinvex functions[J]. J Comput Appl Math,2008,222(2):372-380.

[5] 彭再云,罗洪林. 关于强预不变凸函数的注记[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2006,23(3):36-39.

[6] 唐万梅. 强预不变凸函数的性质[J]. 重庆师范大学学报

报:自然科学版,2006,23(2):8-12.
[7] Pini R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization,1991,22(3):513-525.
[8] Yang X M,Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. J Math Anal Appl,2001,258:287-308.
[9] 彭再云,汪达成. 强预不变凸函数的新性质及应用[J]. 重庆交通大学学报:自然科学版,2008,27:39-42.
[10] 纪晓福. 关于凸函数性质的注记[J]. 天津师范大学学报:自然科学版,1996,16(3):10-13.
[11] Tang W M,Yang X M. The sufficiency and necessity conditions of strongly preinvex functions [J]. OR Transactions,2006,10(3):50-58.

Operations Research and Cybernetics

Strongly *G*-Preinvex Functions

PENG Zai-yun[1], *FANG Xiao-liang*[1], *ZHAO Yong*[1,2]
(1. School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The paper gives a class of new generalized convex function—strongly *G*-preinvex functions, it is a true generalization of strong preinvex function. First, three examples have been got to show that it's existence, and strongly *G*-preinvex function is different from *G*-preinvex function and strictly *G*-preinvex function. Then, we discuses three properties of strongly *G*-preinvex function. Finally, we give a sufficient condition about strongly *G*-preinvex function under the case that *G*-preinvex function, namely, Let the set $K\subset \mathbf{R}^n$ is invex set with $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, η is satisfied with condition C, $f:K\to\mathbf{R}$ is a *G*-preinvex function. if $\exists\alpha>0$, s. t. $\forall x,y\in K,\bar\lambda\in[0,1]$ have $f(y+\bar\lambda\eta(x,y))\leqslant G^{-1}[\bar\lambda G(f(x))+(1-\bar\lambda)G(f(y))-\alpha\bar\lambda(1-\bar\lambda)\|\eta(x,y)\|^2]$. Then, f is a strongly *G*-preinvex function on K with respect to η.

Key words: invex set; strongly *G*-preinvex function; *G*-preinvex function; strictly *G*-preinvex function

(责任编辑 黄 颖)