

# 均匀外场条件下偏心介质球的有效介电常数\*

田峰, 胡先权

(重庆师范大学 物理与工程学院, 重庆 400047)

**摘要:** 本文讨论均匀外场条件下偏心介质球的电场分布。采用分离变量法和级数展开法以及引入有效介电常数概念求出了球内外的电场, 给出了球外有效电偶极矩和电四极矩的近似表达式  $p = 4\pi\epsilon_3 E_0 b^3 \frac{\epsilon_{ef} - \epsilon_3}{\epsilon_{ef} + 2\epsilon_3}$ , 其中,  $\epsilon_{ef}$  可看成

同心微粒介质球的有效介电常数,  $\epsilon_{ef} = \frac{3\beta_{22}\epsilon_c + 2c\beta_{21}(2\epsilon_2 + \epsilon_c)}{3\beta_{22}\epsilon_2 + 2c\beta_{21}(2\epsilon_2 + \epsilon_c)}\epsilon_2$ 。

**关键词:** 有效介电常数; 偏心球形介质球; 偏心距; 电偶极子

**中图分类号:** O441.6

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2011)06-0052-04

## 1 问题的提出

不均匀介质和分层介质的电磁场边值问题, 人们一直给予极大的关注。等效介质理论是研究非均匀介质和分层介质电磁场边值问题的一种有效方法<sup>[1-3]</sup>。静态电场中的均匀介质球或同心分层介质球极化而激发的附加球外电场可等效为电偶极子场及电多极矩场<sup>[4-6]</sup>, 通过引入等效介电常数, 非均匀介质球外的电场就会与等效的均匀介质球的外场一样。实际上, 均匀介质球包含偏心球形微粒在均匀外场条件下也能应用等效介质方法研究球外的电场与电势。

文章利用分离变量法把置于均匀外电场中含有偏心球形微粒介质球内外的电场用级数形式表示<sup>[7-9]</sup>, 系数可通过求解矩阵方程得到。只考虑到4级子项时, 球外偶极子场的解析式与同心多层介质球的等效介电常数的解析式一样, 于是可以引入含偏心球形微粒介质球的有效介电常数的概念。用“有效”代替同心分层介质球的“等效”, 是因为要考虑到如下两点: 第一, 得到的只是含有偏心球形微粒介质球外的偶极子场的一个近似表达式; 第二, 含有偏心球形微粒介质球的有效介质常数除了和球内介质参数有关外, 还和球外介质有关。

## 2 含有偏心球形微粒介质球的外电场

含有偏心球形微粒的介质球如图1所示, 里面小球半径是  $a$ , 外面大球半径是  $b$ , 偏心距是  $c$ , 介电常数分别是  $\epsilon_1, \epsilon_2$ , 球外介质介电常数是  $\epsilon_3$ , 外电场为  $E = E_0 z$ 。选择分离变量法, 令空间电位如下

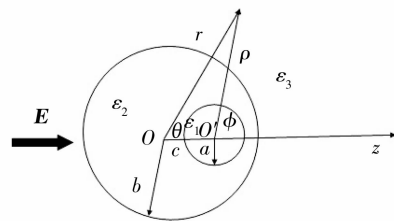


图1 均匀外电场中含有偏心球形微粒的介质球

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho^n P_n(\cos \varphi) & \rho < a \\ \varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left( B_n \rho^n + \frac{C_n}{\rho^{n+1}} \right) P_n(\cos \varphi) & \text{在 } \epsilon_2 \text{ 中} \\ \varphi_3 = -E_0 r \cos \theta + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{D_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) & r > b \end{cases} \quad (1)$$

\* 收稿日期:2011-06-13 修回日期:2011-07-13 网络出版时间:2011-11-10 15:03

资助项目:国家自然科学基金(No. 10575140013)

作者简介:田峰,男,硕士研究生,研究方向为电磁场理论;通讯作者:胡先权, E-mail: huxquan2003@yahoo.com.cn

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20111110.1503.201106.52\_011.html

其中  $P_n(x)$  是勒让德函数。根据微粒球面的边界条件

$$\varphi_1|_{\rho=\alpha} = \varphi_2|_{\rho=\alpha}, \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}|_{\rho=\alpha} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \rho}|_{\rho=\alpha}$$

得到

$$A_n = \frac{(2n+1)\varepsilon_2}{(n+1)\varepsilon_2 + n\varepsilon_1} B_n, C_n = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)na^{2n+1}}{(n+1)\varepsilon_2 + n\varepsilon_1} B_n \quad (2)$$

需要符合介质球面的边界条件

$$\varphi_2|_{r=b} = \varphi_3|_{r=b}, \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}|_{r=b} = \varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}|_{r=b}$$

根据

$$\begin{aligned} \rho^n P_n(\cos \varphi) &= \sum_{m=0}^n \left( \frac{n!}{(n-m)!m!} \right) (-c)^{n-m} r^m P_m(\cos \theta) \\ \frac{P_n(\cos \varphi)}{\rho^{n+1}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{(n+m)!}{(n-m)!m!} \right) (-c)^{n-m} r^m P_m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式,得

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sum_{m=0}^n \left( \frac{n!}{(n-m)!m!} \right) (-c)^{n-m} r^m P_m(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{(n+m)n!}{n!m!} \right) (c)^m r^{-(n+m+1)} P_{n+m}(\cos \theta) \quad (4)$$

将(4)式代入(1)式,由比较系数法得到

$$\begin{cases} B_0 - cB_1 + c^2B_2 + \cdots + (-c)^k B_k = D_0 & k = 0, 1, 2, \cdots \\ B_1 - 2cB_2 + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!} (-c)^{k-1} B_k + \frac{C_1}{b^3} = -E_0 + \frac{D_1}{b^3} & k = 1, 2, \cdots \\ \vdots \\ \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{k!}{(k-n)!n!} (-c)^{k-n} B_k + \sum_{m=2}^{n-1} c_{n-m} \frac{n!}{(n-m)!m!} c^m \frac{1}{b^{2n+1}} = \frac{D_n}{b^{2n+1}} & n = 2, 3, \cdots \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_2 \left( B_1 - 2cB_2 + \cdots + \frac{k!}{(k-1)!} (-c)^{k-1} B_k - \frac{2c_1}{b^3} \right) = \varepsilon_3 \left( -E_0 - \frac{2D_1}{b^3} \right) & k = 1, 2, \cdots \\ \vdots \\ \varepsilon_2 \left( \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{k!}{(k-n)!n!} (-c)^{k-n} n B_k - \sum_{m=0}^{n-1} c_{n-m} \frac{n!}{(n-m)!m!} c^m \frac{n+1}{b^{2n+1}} \right) = -\varepsilon_3 \frac{(n+1)D_n}{b^{2n+1}} & n = 2, 3, \cdots \end{cases} \quad (6)$$

将(2)式代入(5)式和(6)式,通过化简求得关于特征向量  $\mathbf{B}$  的本征方程

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_3 + \varepsilon_2} E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中矩阵元素  $\beta_{ij}$  各项分别是

$$\begin{cases} \beta_{11} = \frac{3\varepsilon_2(\varepsilon_e + 2\varepsilon_3)}{(\varepsilon_e + 2\varepsilon_2)(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)} \\ \beta_{12} = -2c \\ \beta_{j,k} = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(j+1)!}{(k+1)\varepsilon_2 + k\varepsilon_1} \frac{1}{(k-1)!(j-k)!} c^{j-k} a^{2k+1} & (j > k, 1 \leq k \leq n) \\ \beta_{j,j} = ((j+1)\varepsilon_3 + j\varepsilon_2) \left( 1 + \frac{(j+1)j}{(j+1)\varepsilon_3 + j\varepsilon_2} \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(j+1)\varepsilon_2 + j\varepsilon_1} \left( \frac{a}{b} \right)^{2j+1} \right) & (2 \leq j \leq n) \\ \beta_{j,k} = ((j+1)\varepsilon_3 + j\varepsilon_2) \frac{k!}{(k-j)!j!} (-c)^{k-j} b^{2k+1} & (2 \leq j < k, 2 \leq k \leq n) \end{cases}$$

其中

$$\varepsilon_e = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 2\frac{a^3}{b^3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - \frac{a^3}{b^3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \varepsilon_2 \quad (7)$$

$\varepsilon_e$  可看成同心微粒介质的等效介电常数。

$n = 2$  时,

$$\beta_{2,1} = \frac{6cb^3(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_e)}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_e}$$

$$\beta_{2,2} = (3\varepsilon_3 - 2\varepsilon_2)b^5 \left( 1 + \frac{6(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)a^5}{(3\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1)(3\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2)b^5} \right)$$

将(7)式代入(5)式,有

$$D_1 = E_0 b^3 \frac{\varepsilon_{ef} - \varepsilon_3}{\varepsilon_{ef} + 2\varepsilon_3} \quad (8)$$

其中

$$\varepsilon_{ef} = \frac{3\beta_{22}\varepsilon_e + 2c\beta_{21}(2\varepsilon_2 + \varepsilon_e)}{3\beta_{22}\varepsilon_2 + 2c\beta_{21}(2\varepsilon_2 + \varepsilon_e)} \varepsilon_2 \quad (9)$$

$\varepsilon_{ef}$  可看成同心微粒介质的有效介电常数,则电偶极矩可表为

$$p = 4\pi\varepsilon_3 E_0 b^3 \frac{\varepsilon_{ef} - \varepsilon_3}{\varepsilon_{ef} + 2\varepsilon_3}$$

### 3 分析与讨论

1) 观察(9)式可以发现:含有偏心球形微粒介质的偶极矩表达式与同心多层介质球所等效的偶极矩表达式完全吻合。于是  $\varepsilon_{ef}$  可以作为偏心球形微粒介质的有效介电常数。

2) 根据(8)式发现: $\varepsilon_{ef}$  与  $\varepsilon_3$  有关, $c = 0$  时,为同心介质球; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  时,为均匀介质球。

3) 由(5)式求得  $D_2 = E_0 b^3 \varepsilon_3 \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_2)c + \frac{3b^2\alpha}{2c} \left( 1 + \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3\varepsilon_2 + \varepsilon_1} g \right)}{\varepsilon_2(\varepsilon_e + 2\varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_2)\alpha}$ , 其中,  $\alpha = \frac{2c\beta_{21}}{3\beta_{22}}(2\varepsilon_2 + \varepsilon_e)$ ,  $g = \frac{a^5}{b^5}$ ,

则电四极矩  $D_z = 12\pi\varepsilon_3 E_0 b^3 \frac{(\varepsilon_e - \varepsilon_2)c + \frac{3b^2\alpha}{2c} \left( 1 + \frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3\varepsilon_2 + \varepsilon_1} g \right)}{\varepsilon_2(\varepsilon_e + 2\varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3)\alpha}$ 。

4) 本文计算中, $n$  的取值反映了含偏心球形微粒介质的有效介电常数的计算精度。把含有偏心球形微粒介质球看作有相同参数的同心介质球时  $n = 1$ ; 空间电位级数展开项愈多  $n$  愈大,由此可知, $n$  越大有效介电常数的计算精度越高。图 2 是  $n$  取不同值时,有效介电常数与偏心距的关系。由图 2 可知:当偏心距较小时,空间电位级数展开项无需太多;当偏心距较大时空间电位级数展开项必须进行高价展开。在偏心距较小时,偏心介质球外偶极子的电场与同心介质球外的电场基本相同;随着偏心距的增大,偏心介质球外偶极子的电场与同心介质球外的电场会产生一定的差别,有效介电常数小于等效介电常数。

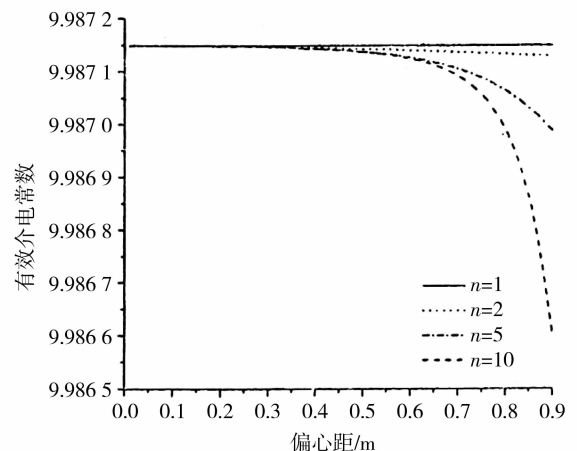


图 2 有效介电常数随偏心距的变化

## 参考文献:

- [1] 姜泽辉,赫晓东,韩杰才,等. 均匀电场中颗粒簇偶极矩的确定[J]. 物理学报,1999,48(6):1037-1039.
- [2] 沈放林,何赛灵,吴良. 等效介质理论在光子晶体平面波展开分析方法中的应用[J]. 物理学报,2002,51(5):1133-1139.
- [3] Aspnes D E. Local-field effects and effective-medium theory [J]. Am J Phys,1982,50:704-710.
- [4] Haus J,Zhou H S,Takami S, et al. Enhanced optical properties of metal-coated nanoparticles [J]. Appl Phys,1993,73(3):1043-1050.
- [5] Kong J A. Electromagnetic wave theory [M]. Beijing: Higher Education Press,2002.
- [6] 桑芝方,李振亚. 非均匀介质球颗粒的等效介电常量 [J]. 大学物理,2005,24(2):34-39.
- [7] 胡先权,廖海峰. 电偶极子位于均匀介质球中时球外电场的研究[J]. 大学物理,2008,27(11):20-23.
- [8] 蒋明宇,胡先权,邓海. 均匀电介质椭球内极化场强的研究[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2004,21(2):41-45.
- [9] 李旭,胡先权. 对均匀电介质内极化场强的研究[J]. 山西师范大学学报:自然科学版,2003,17(2):45-59.

## Discussing the Effective Permittivity of Eccentric Sphere Inclusion in the Well-Distributed External Field

*TIAN Feng, HU Xian-quan*

(College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract:** The electric field distribution which is produced by the dielectric Sphere with an eccentric sphere inclusion in influence of the uniform external field is discussed by mean of the methods of variable separation, series expanding and the introductive conception of the effective permittivity. The analytical approximate expressions of effective dipole moment and quadrupole moment are obtained  $p =$

$$4\pi\epsilon_3 E_0 b^3 \frac{\epsilon_{ef} - \epsilon_3}{\epsilon_{ef} + 2\epsilon_3}, \text{ and } \epsilon_{ef} = \frac{3\beta_{22}\epsilon_e + 2c\beta_{21}(2\epsilon_2 + \epsilon_e)}{3\beta_{22}\epsilon_2 + 2c\beta_{21}(2\epsilon_2 + \epsilon_e)}\epsilon_2.$$

**Key words:** effective permittivity; eccentric sphere inclusion; eccentricity; dipole moment

(责任编辑 欧红叶)