2011 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2011
第 28 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 28 No. 1

DOI:10.3969/J. ISSN. 1672-6693. 2011. 01. 008

有限理性与 KKM 点集的稳定性*

张 德 金

(贵州大学 理学院, 贵阳 550025)

摘要:文章首先给出有限理性非线性问题的稳定性结果,然后应用统一结果对 KKM 点问题构造了问题空间,定义了理性函数,讨论了有限理性下 KKM 点问题解的稳定性。通过证明其满足统一结论的假设条件,得到了有限理性下 KKM 点集结构稳定性和鲁棒性结论。并证明了大多数的 KKM 点问题在 Baire 分类意义上都是结构稳定的,对 ε-平衡也都是鲁棒的,得到了有限理性下 KKM 点集稳定性的一系列结果。并且,由于在问题研究中考虑了人们只具有有限理性的假设条件,故扩展了 KKM 点问题结论的应用范围。

关键词:有限理性;KKM 点;稳定性

中图分类号:O177 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2011)01-0034-03

KKM 点问题不仅是集值分析中的一个重要问题,更在博弈论和数理经济学的研究中起到相当大的作用,他们在证明 Brouwer 不动点定理、Ky Fan 不等式和变分不等式等过程中更是起到了关键作用,继而对现代经济管理许多方面的研究都将产生重大的影响。因此,研究 KKM 点集的稳定性不但具有相当的理论价值,更具有重大的现实意义。先前的研究都主要集中在对人们的完全理性假设之上,然而现实中人都不可能是完全理性的,经济学中的经纪人假设要求太高,不太符合实际,以至于完全理性假设之上所得的结论在实际应用中就受到了极大的限制。基于这点,研究有限理性下 KKM 点集的稳定性,将对现实中的管理与决择发挥极大的推动作用,进而大大扩展其在实际经济管理研究中的应用范围。

关于有限理性下非线性问题解的稳定性研究,在最近的十年中相当活跃[1-6]。文献[6-7]建立了研究的统一模型,具体来说[7] 模型 M 是一个四元序列(Λ,X,f,Φ):Λ 是问题空间,每个 $\lambda\in\Lambda$ 表示一个非线性问题;X 是"解"空间,每个 $x\in X$ 表示一个解,每个 $\lambda\in\Lambda$ 的解都在 X 中;$\forall\lambda\in\Lambda$,问题 λ 的可行解集 $f(\lambda)\subset X$,即 $F:\Lambda\to 2^X$ 是一个集值映射,显然 $x\in f(\lambda)$ 表示 x 是问题 λ 的可行解;映射 f 的图定义为 $graph(f)=\{(\lambda,x)\in\Lambda\times X:x\in f(\lambda)\}$,$\Phi:graph(f)\to\mathbf{R}_+$ 是非线性问题的理性函数,$\Phi(\lambda,x)=0$ 对应于完全理性。$\forall\lambda\in\Lambda,\forall\varepsilon\geqslant 0,E(\lambda,\varepsilon)=\{x\in f(\lambda):\Phi(\lambda,x)\leqslant\varepsilon\}$ 表示问题 λ 的 ε-解集,当 $\varepsilon=0$ 时,$E(\lambda)=E(\lambda,0)=\{x\in f(\lambda):\Phi(\lambda,x)=0\}$ 表示问题 λ 的解集,当 $\varepsilon>0$ 充分小时代表少量的有限理性。因此,$\Phi(\lambda,x)=0$ 当且仅当 $x\in E(\lambda)$。

本文首先给出有限理性下非线性问题解的稳定性的统一结果,然后对 KKM 点问题构造参数空间,定义理性函数,证明其满足统一结果的条件,得到了其解的稳定性的一系列结果。

1 预备知识

1.1 集值映射的连续性

定义 1[7-8] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to 2^Y$ 是一个映射,则有

1) 如果对 Y 中任意开集 U,$U\supset f(x)$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $\forall x'\in O(x)$,$U\supset f(x')$,则称 f 在 $x\in X$ 是上半连续 如果 $\forall x\in X$,f 在 x 都是上半连续,则称 f 在 X 上是上半连续的;

---

* 收稿日期:2010-08-18

资助项目:国家自然科学基金(No. 10461004);贵州大学研究生创新基金(理工 2010040)

作者简介:张德金,男,讲师,硕士研究生,研究方向为博弈论与非线性分析。

2)如果对 Y 中任意开集 U,$U \cap f(x) \neq \phi$,存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $\forall x' \in O(x)$,$U \cap f(x') \neq \phi$,则称 f 在 $x \in X$ 是下半连续的 如果 $\forall x \in X$,f 在 x 都是下半连续,则称 f 在 X 上是下半连续的;

3)如果 f 在 X 上既是上半连续又是下半连续的,则称 f 在 X 上是连续的。

注 在度量空间 X 中,对单值泛函 $f:X \to \mathbf{R}$,$x \in X$,如果 $\forall \varepsilon > 0$,存在 x 的开邻域 $U(x)$,使 $\forall x' \in U(x)$,有 $f(x') < f(x) + \varepsilon$(或 $f(x') > f(x) - \varepsilon$),则称泛函 f 在 x 是上半连续的(或下半连续的)。

引理1 在完备度量空间 X 中,映射 f 是下半连续的当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$,$\forall x_n \in X$,$x_n \to x$,则存在正整数 $\mathbf{N}$,使 $\forall n \geq \mathbf{N}$,有 $f(x_n) < f(x) + \varepsilon$。

1.2 结构稳定和鲁棒性的定义

定义2[2] 给定 $\lambda \in \Lambda$,如果平衡映射 $E:\Lambda \to 2^X$ 在 λ 是连续的,则称 M 在 λ 是结构稳定的。

定义3[2] 如果 $\forall \delta > 0$,$\exists \bar{\varepsilon} > 0$,使 $\forall \varepsilon < \bar{\varepsilon}$,$\forall \lambda \in \Lambda$,$\forall \lambda' \in \Lambda$,当 $\rho(\lambda,\lambda') < \bar{\varepsilon}$ 时,有 $h(E(\lambda',\varepsilon),E(\lambda')) < \delta$,则称 M 在 λ 对 ε-平衡是鲁棒的。其中 h 是空间 X 上的 Hausdorff 度量。

1.3 非线性问题的统一结论

定理A[3] 设 (Λ,ρ) 是完备度量空间,(X,d) 是度量空间;$f:\Lambda \to 2^X$ 上半连续,$\forall \lambda \in \Lambda$,$f(\lambda)$ 是非空紧集;$\Phi:graph(f) \to \mathbf{R}_+$ 下半连续,且 $\forall \lambda \in \Lambda$,$E(\lambda) \neq \phi$。则

1)平衡映射 $E:\Lambda \to 2^X$ 上半连续,且非空紧值;

2)存在 Λ 中一个稠密 G_δ 型集 Q,使 $\forall \lambda \in Q$,M 是结构稳定的;

3)如果 M 在 λ 是结构稳定的,则 M 在 λ 对 ε-平衡也必是鲁棒的,因此,$\forall \lambda \in Q$,M 在 λ 对 ε-平衡是鲁棒的;

4)给定 $\lambda \in Q$,则当 $\forall \lambda_n \to \lambda$,$\varepsilon_n \to 0$ 时,有 $h(E(\lambda_n,\varepsilon_n),E(\lambda)) \to 0$;

5)如果 $\lambda \in Q$,而 $E(\lambda) = \{x\}$(单点集),则 M 在 λ 是结构稳定的,且在 λ 对 ε-平衡也必是鲁棒的。

注 在定理A的假设条件下,因 Φ 下半连续,由文献[7]中定理1.3.11的结论(1)知 $\forall \lambda \in \Lambda$,$\forall \varepsilon \geq 0$,问题 λ 的 ε-解集 $E(\lambda,\varepsilon) = \{x \in f(\lambda):\Phi(\lambda,x) \leq \varepsilon\}$ 必是紧集 X 中的闭集,从而是紧集。

2 主要结果

设 X 是线性赋范空间 E 中的一个有界完备凸集,如果集值映射 $G:X \to P_0(X)$ 满足,$\forall x \in X$,$G(x)$ 是非空紧集,且 $\forall \{x_1,\cdots,x_n\} \subset X$,有 $co\{x_1,\cdots,x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)$,则称 G 是一个 KKM 映射[7]。其中 $co\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的凸包。这样,由 KKMF 引理[7],$\exists x^* \in \bigcap_{x \in X} G(x)$,称 x^* 为映射 G 的 KKM 点。

记 $\Lambda = \{\lambda = G:G:X \to P_0(X)$ 满足 $\forall x \in X$,$G(x)$ 是非空紧集,且 $\forall \{x_1,\cdots,x_n\} \subset X$,有 $co\{x_1,\cdots,x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i)\}$。$\forall \lambda = G \in \Lambda$,定义了一个 KKM 点问题:求 $x^* \in X$,使得 $x^* \in \bigcap_{x \in X} G(x)$。记 $E(\lambda) = \left\{x \in X: x \in \bigcap_{x \in X} G(x)\right\}$ 为映射 G 的所有 KKM 点集合,则 $E(\lambda) \neq \phi$。

$\forall \lambda_1 = G_1$,$\lambda_2 = G_2 \in \Lambda$,定义距离 $\rho(\lambda_1,\lambda_2) = \sup_{x \in X} h(G_1(x),G_2(x))$。其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离。

引理1 是 (Λ,ρ) 一个完备度量空间。

证明 设 $\{\lambda_n = G_n\}$ 是 Λ 中的任意 Cauchy 序列,则 $\forall \varepsilon > 0$,存在正整数 N_1,使 $\forall m,n \geq N_1$,有 $\rho(\lambda_m,\lambda_n) = \sup_{x \in X} h(G_m(x),G_n(x)) < \varepsilon$。

因 X 完备,由文献[7]中系2.1.1,$\forall x \in X$,存在非空紧集 $G(x)$,使得 $h(G_n(x),G(x)) \to 0$,且易证 $\sup_{x \in X} h(G_n(x),G(x)) \to 0$。

如果 G 不是 KKM 映射,则 $\exists \{x_1,\cdots,x_m\} \subset X$,$\exists x' \in co\{x_1,\cdots,x_m\}$,而 $x' \notin \bigcup_{i=1}^{m} G(x_i)$。因 $\forall i = 1,\cdots,m$,$G(x_i)$ 是紧集,故 $\exists \varepsilon_0 > 0$,使 $x' \notin \bigcup_{i=1}^{m} [\cup(\varepsilon_0,G(x_i))]$,因 $\sup_{x \in X} h(G_n(x),G(x)) \to 0$,存在正整数 $N_2 \geq N_1$,使

$\forall n \geqslant N_2$，有 $\bigcup_{i=1}^{m} G_n(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{m} [\cup(\varepsilon_0, G(x_i))]$。这样，$\forall n \geqslant N_2$，有 $x' \notin \bigcup_{i=1}^{m} G_n(x_i)$，$co\{x_1, \cdots, x_m\} \not\subset \bigcup_{i=1}^{m} G_n(x_i)$，这与 $G_n \in \Lambda$ 矛盾，因此 G 必是 KKM 映射。

故 (Λ, ρ) 是一个完备度量空间。$\forall \lambda = G \in \Lambda$，定义 $f(\lambda) = X$。则 f 显然连续，且 $\forall \lambda = G \in \Lambda$，$f(\lambda)$ 为紧集。$\forall x \in f(\lambda)$，定义理性函数为 $\Phi(\lambda, x) = \sup_{y \in X} d(x, G(y))$。则易证：$\forall \lambda \in \Lambda$，$\forall x \in f(\lambda) = X$，$\Phi(\lambda, X) \geqslant 0$；$\Phi(\lambda, x) = 0$ 当且仅当 $x \in E(\lambda)$。　证毕

引理 2　$\Phi(\lambda, x)$ 对 (λ, x) 是下半连续的。

证明　只需证明 $\forall \varepsilon > 0$，$\forall \lambda_n = G_n \in \Lambda$，$\lambda_n \to \lambda = G \in \Lambda$，$\forall x_n \in X$，$x_n \to x \in X$，则存在正整数 $N(\varepsilon)$，使 $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$，有 $\Phi(\lambda, x) < \Phi(\lambda_n, x_n) + \varepsilon$。

首先，由上确界定义，$\exists y_0 \in X$，使 $\Phi(\lambda, x) < d(x, G(y_0)) + \frac{1}{2}\varepsilon$。

由 $G_n \to G$ 知，存在正整数 $N_1(\varepsilon)$，使 $\forall n \geqslant N_1(\varepsilon)$，有 $\rho(G_n, G) < \frac{1}{4}\varepsilon$，即 $\forall y \in X$，有 $h(G_n(y), G(y)) < \frac{1}{4}\varepsilon$，于是 $d(x, G(y_0)) \leqslant d(x, G_n(y_0)) + h(G_n(y_0), G(y_0)) < d(x, G_n(y_0)) + \frac{1}{4}\varepsilon$。

又因 $x_n \to x \in X$，存在 $N(\varepsilon) \geqslant N_1(\varepsilon)$，$\forall n \geqslant N(\varepsilon)$，有 $d(x, x_n) < \frac{1}{4}\varepsilon$。于是有

$$\Phi(\lambda, x) < d(x, G(y_0)) + \frac{1}{2}\varepsilon < d(x, G_n(y_0)) + \frac{3}{4}\varepsilon \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, G_n(y_0)) + \frac{3}{4}\varepsilon < d(x_n, G_n(y_0)) + \varepsilon \leqslant \sup_{y \in X} d(x_n, G_n(y)) + \varepsilon = \Phi(\lambda_n, x_n) + \varepsilon$$

由上述引理 1，引理 2 知，定理 A 的假设条件全部满足，于是有以下定理。

定理 1　对 KKM 点问题 $M = (\Lambda, X, f, \Phi)$，定理 A 成立。

3 结语

本文对 KKM 点问题定义了理性函数，然后在所构造的空间假设下，研究其解的稳定性，得到 KKM 点问题解的稳定性的相关结果。因 Λ 是完备度量空间，故 Λ 是 Baire 空间，而 Q 是 Λ 中的一个稠密 G_δ 集，它必是第二纲的。由上面定理结论 2)、3) 可知，在 Baire 分类的意义上，大多数的 KKM 点问题都是结构稳定的，对 ε-平衡也是鲁棒的。由于 Q 是第二纲的，则非结构稳定和对 ε-平衡非鲁棒的问题（文献[1]中称为临界参数值）的集合就必是第一纲的，在 Baire 分类的意义上，它相当少。也就是说，少量的有限理性，对 KKM 点集影响不大。并且，由于有限理性的引入，使得所得结论更加符合现实世界的人的实际行为，从而大大扩展了其在现实问题中的应用。

致谢　感谢导师俞建教授在本文创作过程中给予指导和帮助！

参考文献：

[1] Anderlini L, Canning D. Structural stability implies robustness to bounded rationality[J]. J of Economic Theory, 2001, 101: 395-422.

[2] Yu C, Yu J. On structural stability and robustness to bounded rationality[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2006, 65: 583-592.

[3] Yu J, Ynag H, Yu C. structural stability and robustness to bounded rationality for non-compact cases[J]. J Glob Optim. 2009, 44: 149-157.

[4] Yu C, Yu J. Bounded rationality in multiobjecive games[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2007, 67: 930-937.

[5] Tan K K, Yu J, Yuan X Z. The stability of Ky Fan's points[J]. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 1511-1519.

[6] 俞建. 几类考虑有限理性平衡问题解的稳定性[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(7): 999-1008.

[7] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京：科学出版社, 2008.

[8] Aubin J P, Frankowska H. Set-Valued Analysis[M]. Boston: Birkhauser, 1990.

Bounded Rationality and Stability of KKM's Points Sets

ZHANG De-jin

(Dept. of Mathematics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: It has been studied actively in recent years the consider the bounded rationality in the study of the stability about the solution of nonlinear problems, whose results will fit with the practical situation more easily. In this paper, the unified conclusions of stability for nonlinear problems are given first, and then, with the use of applications of the unified model, problems' metric for KKM's points problems are constricted and rationality function for KKM's points problems are defined, to discuss the stability of solutions for KKM's points problems on the bounded rationality. It is proved that KKM's points problems are satisfied all of hypothesis conditions of the unified conclusions, we receive the conclusions of structurally stable and robust. Then, it is proved that most of KKM's points problems(in the sense of Baire category) are structurally stable and robust to ε – equilibria, finally, the stability results on KKM's points problems are given. Moreover, We assume that people only have bounded rationality in the study, so we can enlarge the application scope of the results of the KKM's points problems.

Key words: bounded rationality; KKM's points; stability

(责任编辑　黄　颖)