2011 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2011
第 28 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)　　Vol. 28 No. 5

CNKI:50-1165/N. 20110917. 1359. 008

有限个 λ 半压缩映象族的强收敛定理*

彭凤平, 黄金平, 戴　敏

(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要 设 E 为一致光滑的 Banach 空间且是一致凸的, C 为 E 中的非空闭凸子集, $T_1, T_2, \cdots, T_N: C \to C$ 是 λ 半压缩映象且为 L-Lipschitzian 映象, $\lambda \in (0,1)$, 公共不动点集非空, 并且存在一个映象 $T \in \{T_i: i \in I\}$ 是半紧的。$\{x_n\}$ 是由 $x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T_n x_n$ 确定的迭代序列, $T_n = T_{n \bmod N}$。在对 $\{a_n\}$ 的一定假设条件下, 本文证明了 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的一个公共不动点。

关键词: λ 半压缩映象; 一致光滑; Mann 迭代序列; 不动点

中图分类号: O177.91　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1672-6693(2011)05-0037-04

伪压缩映象是一类非常重要的非线性映象。近年来, 对许多作者对严格伪压缩映象、强伪压缩映象及渐近严格伪压缩映象都进行了研究, 得到了大量的成果。最近, C. E. Chidume 和 Naseer Shahzad 在文献[1]中证明了 λ 严格伪压缩映象的弱收敛定理。

本文受文献[1]的启发, 在 E 为一致光滑的 Banach 空间且为一致凸的条件下, 对于更广泛的 λ 半压缩映象族, 得到了强收敛性定理。

1 预备知识

设 E 为实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, J 是从 E 到 2^{E^*} 的正规对偶映象[1]

$$J(x) = \{f \in E^*: \langle x, f\rangle = \|x\|^2 = \|f\|^2\}$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 E 与 E^* 间的广义对偶对。

定义 1[2]　称 $T: C \to C$ 为 λ 半压缩映象, 如果对 $\lambda \in [0,1)$, $\forall x \in D(T)$, $p \in F(T)$, 存在 $j(x-p) \in J(x-p)$ 使得

$$\langle Tx - p, j(x-p)\rangle \leq \|x - p\|^2 - \lambda \|x - Tx\|^2 \tag{1}$$

注 1　(1)式也等价于

$$\langle x - Tx, j(x-p)\rangle \geq \lambda \|x - Tx\|^2$$

并且一个映象为 λ 半压缩映象不一定为伪压缩映象。

例　$T: [0,3] \to [0,3]$, $Tx = \begin{cases} 2x - 4, x \in [2,3] \\ 0, x \in [0,2) \end{cases}$, T 是 1 半压缩映象和 2-Lipschitzian, 取 $x = 3$, $y = 1$, 则 $\langle Tx - Ty, x - y\rangle = 6 \neq 4 = \|x - y\|^2$。

定义 2[3]　设 $\rho_E(t): [0,\infty) \to [0,\infty)$ 映象, E 的光滑模是指

$$\rho_E(t) = \sup\left\{\frac{\|x + y\| + \|x - y\| - 1}{2}: \|x\| = 1, \|y\| \leq t\right\}$$

称 E 是一致光滑的, 是指 $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\rho_E(t)}{t} = 0$。

注 2[3]　Banach 空间 E 是一致光滑的充要条件是, 正规对偶映象是单值的且在 E 的任意有界集上是一致连续的。

* 收稿日期: 2011-04-17　修回日期: 2011-09-17　网络出版时间: 2011-09-17 13:59:00
作者简介: 彭凤平, 男, 硕士研究生, 研究方向为不动点理论。
网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20110917.2359.201105.33_007.html

注3[4] 设 E 是 Banach 空间,则以下的陈述等价:1) E 是一致光滑的;2) E^* 是一致凸的;3) E 的范数是一致 Frechet 可微的。

2 相关引理

引理1[5] 设 E 是实 Banach 空间,$J:E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象,则

$$\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\forall x,y\in E,j(x+y)\in J(x+y)$$

引理2[6] 设 $\{\delta_n\}$,$\{\beta_n\}$,$\{\gamma_n\}$ 是3个满足不等式的非负数列:$\delta_{n+1}\leqslant\beta_n\delta_n+\gamma_n$,$\forall n\in\mathbf{N}$,若 $\beta_n\ge 1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\beta_n-1)<\infty$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n$ 存在。

引理3[7] 设 $R>1$ 为一常数,E 为 Banach 空间,E 为一致凸的充要条件是存在一严格递增的凸函数 $g:[0,\infty)\to[0,\infty)$,其中 $g(0)=0$ 使得

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2\le\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)g(\|x-y\|)$$
$$\forall x,y\in\overline{B_R(0)}:=\{x\in E:\|x\|\le R\},\lambda\in[0,1]$$

引理4[8] 设 E 是一致光滑的实 Banach 空间,存在一非减的连续函数 $\beta:[0,\infty)\to[0,\infty)$,其中 $\lim\limits_{t\to 0^+}\beta(t)=0$ 且 $\beta(ct)\le c\beta(t)$,$c\ge 1$,$\forall x,y\in E$,使得

$$\|x+y\|^2\le\|x\|^2+2\langle y,j(x)\rangle+\max\{\|x\|,1\}\|y\|\beta(\|y\|)$$

3 主要结果

定理1 设 E 是一致光滑的 Banach 空间且是一致凸的,C 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N:C\to C$ 是 λ 半压缩映象,$\lambda\in[0,1)$,且为 L-Lipschitzian 映象,满足 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{N}F(T_i)\neq\varnothing$,并且存在一个映象 $T\in\{T_i:i\in I\}$ 是半紧的,对确定的 $x_1\in C$,$\{x_n\}$ 是由

$$x_{n+1}=(1-a_n)x_n+a_nT_nx_n(n\ge 1)$$

确定的迭代序列,且满足 i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$;ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n{}^2<\infty$。$T_n=T_{n\bmod N}$,则 $\{x_n\}$ 有界。

证明 首先证明 $\{x_n\}$ 是有界的,事实上,取 $p\in F$,$\forall n\ge 1$,有

$$\|x_{n+1}-p\|\leqslant(1-a_n)\|x_n-p\|+a_n\|T_nx_n-p\|\leqslant(1+L)\|x_n-p\| \tag{3}$$
$$\|x_n-T_nx_n\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p-T_nx_n\|\leqslant(1+L)\|x_n-p\| \tag{4}$$

并且有

$$\|x_{n+1}-x_n\|=a_n\|T_nx_n-x_n\|\leqslant a_n(1+L)\|x_n-p\| \tag{5}$$

所以根据引理1,由(2)~(5)式有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2&=\|(x_n-p)+a_n(T_nx_n-x_n)\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2+2a_n\langle T_nx_n-x_n,j(x_{n+1}-p)\rangle=\\&\|x_n-p\|^2+2a_n\langle T_nx_n-T_nx_{n+1},j(x_{n+1}-p)\rangle+2a_n\langle T_nx_{n+1}-x_{n+1},j(x_{n+1}-p)\rangle+\\&2a_n\langle x_{n+1}-x_n,j(x_{n+1}-p)\rangle\leqslant\|x_n-p\|^2+2a_nL\|x_n-x_{n+1}\|\|x_{n+1}-p\|-2a_n\lambda\|x_{n+1}-T_nx_{n+1}\|^2+\\&2a_n^2\|x_n-T_nx_n\|\|x_{n+1}-p\|\leqslant\|x_n-p\|^2+2a_n^2L(1+L)^2\|x_n-p\|^2-2a_n\lambda\|x_{n+1}-T_nx_{n+1}\|^2+\\&2a_n^2(1+L)^2\|x_n-p\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2+2a_n^2(1+L)^3\|x_n-p\|^2-2a_n\lambda\|x_{n+1}-T_nx_{n+1}\|^2\end{aligned}$$

所以有

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant[1+2a_n^2(1+L)^3]\|x_n-p\|^2$$

由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2<\infty$,再根据引理2,可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ 存在,故 $\{x_n\}$ 有界。 证毕

由于 $\{x_n\}$ 有界,由引理4,存在 $r>0$,$\{x_n\}\subseteq\overline{B_r(0)}\cap K$,定义 $A:=\max\{2r,1\}$,下面假定 $\beta(t)\leqslant\dfrac{\lambda t}{A}$,$t\in[0,\infty)$,其中 $\lambda>0$。

定理2 设 E 是一致光滑的 Banach 空间且是一致凸的,C 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N:C\to C$

是 λ 半压缩映象，$\lambda \in [0,1)$，且为 L-Lipschitzian 映象，满足 $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \varnothing$，并且存在一个映象 $T \in \{T_i : i \in I\}$ 是半紧的，对确定的 $x_1 \in C$，$\{x_n\}$ 是由

$$x_{n+1} = (1 - a_n)x_n + a_n T_n x_n (n \geqslant 1)$$

确定的迭代序列，且满足 i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$；ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$。$T_n = T_{n \bmod N}$，则 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 的公共不动点。

证明　假设 $\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - T_n x_{n+1} \| = \delta > 0$，故存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n \geq N$ 时，有 $\| x_{n+1} - T_n x_{n+1} \| \geq \frac{\delta}{2}$，令 $M = \sup_{n \in N} \{\| x_n - p \|\}$，由(6)式可知

$$\| x_{n+1} - p \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 + 2a_n^2 (1 + L)^3 \| x_n - p \|^2 - 2a_n \lambda \| x_{n+1} - T_n x_{n+1} \|^2 \leq$$
$$\| x_n - p \|^2 + 2a_n^2 (1 + L)^3 M^2 - a_n \lambda \frac{\delta^2}{2} (\forall n \geqslant N)$$

故有

$$\lambda \frac{\delta^2}{2} a_n \leq \| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2 + 2a_n^2 (1 + L)^3 M^2$$

对 $\forall m \geq N$，有

$$\lambda \frac{\delta^2}{2} \sum_{n=N}^{m} a_n \leq \sum_{n=N}^{m} (\| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2) + 2(1 + L)^3 M^2 \sum_{n=N}^{m} a_n^2 =$$
$$\| x_N - p \|^2 - \| x_{m+1} - p \|^2 + 2(1 + L)^3 M^2 \sum_{n=N}^{m} a_n^2 \leqslant \| x_N - p \|^2 + 2(1 + L)^3 M^2 \sum_{n=N}^{m} a_n^2$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$，当 $m \to \infty$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$，这与已知条件相矛盾，所以 $\lim_{x\to\infty} \| x_{n+1} - T_n x_{n+1} \| = 0$。

再证 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_n x_n \| = 0$，$\forall l \in \{1, 2, \cdots, N\}$，由引理 4，这是因为

$$\| x_{n+1} - p \|^2 = \| x_n - p + a_n (T_l x_n - x_n) \|^2 \leqslant \| x_n - p \|^2 + 2a_n \langle T_l x_n - x_n, j(x_n - p) \rangle +$$
$$\max\{\| x_n - p \|, 1\} a_n \| T_l x_n - x_n \| \beta(a_n \| T_l x_n - x_n \|) \leqslant$$
$$\| x_n - p \|^2 - 2a_n \lambda \| x_n - T_l x_n \|^2 + \max\{\| x_n - p \|, 1\} a_n \| x_n - T_l x_n \| \beta(a_n \| x_n - T_l x_n \|) \leqslant$$
$$\| x_n - p \|^2 - 2a_n \lambda \| x_n - T_l x_n \|^2 + a_n^2 \lambda \| x_n - T_l x_n \|^2 \leqslant \| x_n - p \|^2 - a_n \lambda \| x_n - T_l x_n \|^2$$

所以有

$$a_n \lambda \| x_n - T_l x_n \|^2 \leqslant \| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \| x_n - T_l x_n \|^2 < \infty$，又

$$\| x_n - T_l x_{n+1} \|^2 = \| (x_n - T_l x_n) + (T_l x_n - T_l x_{n+1}) \|^2 \leqslant$$
$$\| x_n - T_l x_n \|^2 + 2\langle T_l x_n - T_l x_{n+1}, j(x_n - T_l x_{n+1}) \rangle \leqslant \| x_n - T_l x_n \|^2 + 2L \| x_n - x_{n+1} \| \| x_n - T_l x_{n+1} \| =$$
$$[1 + 2a_n L(1 + a_n L)] \| x_n - T_l x_n \|^2 \leqslant [1 + 2a_n L(1 + L)] \| x_n - T_l x_n \|^2$$

再根据引理 3，有

$$\| x_{n+1} - T_l x_{n+1} \|^2 = \| (1 - a_n)(x_n - T_l x_{n+1}) + a_n (T_n x_n - T_l x_{n+1}) \|^2 \leqslant$$
$$(1 - a_n) \| x_n - T_l x_{n+1} \|^2 + a_n \| (T_n x_n - T_l x_{n+1}) \|^2 \leqslant (1 - a_n) \| x_n - T_l x_{n+1} \|^2 + a_n^2 L^2 \| x_n - T_l x_n \|^2 \leqslant$$
$$(1 - a_n)(1 + 2a_n L(1 + L)) \| x_n - T_l x_n \|^2 + a_n^2 L^2 \| x_n - T_l x_n \|^2 \leqslant$$
$$(1 + a_n^2 L^2) \| x_n - T_l x_n \|^2 + 2a_n L(1 + L) \| x_n - T_l x_n \|^2$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \| x_n - T_l x_n \|^2 < \infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$，根据引理 2，有 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_l x_n \|$ 存在，由 l 的任意性，即 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_n x_n \|$ 存在，又 $\overline{\lim_{n\to\infty}} \| x_n - T_n x_n \| = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} \| x_n - T_n x_n \| = 0$。由(5)式可知 $\| x_n - x_{n-1} \| \to 0$，$n \to 0$，进而有

$$\| x_{n+i} - x_n \| \to 0 (n \to \infty), \forall i \in I$$

所以有

$$\| x_n - T_{n+i} x_n \| \leqslant \| x_n - x_{n+i} \| + \| x_{n+i} - T_{n+i} x_{n+i} \| + \| T_{n+i} x_{n+i} - T_{n+i} x_n \| \leq$$

$$\| x_n - x_{n+i} \| + \| x_{n+i} - T_{n+i}x_{n+i} \| + L \| x_{n+i} - x_n \| = (1+L) \| x_{n+i} - x_n \| + \| x_{n+i} - T_{n+i}x_{n+i} \| \to 0 (n \to \infty)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - T_{n+i}x_n \| = 0$ ($\forall i = 1,2,\cdots,N$)。

因为 $T_n = T_{n \bmod N}$,易证,对 $\forall l \in I$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - T_l x_n \| = 0$。由假设,存在一个映象 $T \in \{T_i : i \in I\}$ 是半紧的,不妨设 T_1 是半紧的。因此存在一个子序列 $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$,满足

$$x_{n_i} \to x^* \in C \ (i \to \infty) \tag{7}$$

因为 $T_l, l \in I$ 是 L-Lipchitzian 连续的映象,所以由(7)式可知

$$\| x^* - T_l x^* \| = \lim_{i\to\infty} \| x_{n_i} - T_l x_{n_i} \| = 0, \forall l \in I$$

这就表明 x^* 是 $T_l, l \in I$ 的公共不动点,即 $x^* \in F$,于是极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x^* \|$ 存在,故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in F$$

证毕

参考文献:

[1] Chidume C E, Shahzad N. Weak convergence theorems for a finite family of strict pseudocontractions[J]. Nonlinear Anal, 2010, 72: 1257-1265.

[2] Hicks T L, Kubicek J D. On the Mann iteration process in a Hilbert space[J]. J Math Anal Appl, 1977, 59: 498-504.

[3] Chang S S. On Halpern's open question[J]. Acta Math Sinica, 2005, 48: 979-984.

[4] 游兆永,龚怀云,徐宗本. 非线性分析[M]. 西安:西安交通大学出版社, 1986.

[5] Xu Yu-guang. Ishikawa and Mann Iterative Processes with Errors for Nonlinear Strongly Accretive Operator Equations[J]. Math Anal Appl, 1998, 224: 91-101.

[6] Osilike M O, Aniagbosor S C. Weak and strong convergence theorems for fixed points of asymptotically nonexpensive mappings[J]. Math Comput Model, 2000, 32: 1181-1191.

[7] Xu H K. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonlinear Anal, 1991, 16: 1127-1138.

[8] Reich S. An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1978, 2: 85-92.

The Strong Convergence Theorems for a Finite Family of λ-demicontractive Mappings

PENG Feng-ping, HUANG Jin-ping, DAI Min

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Let E be a uniformly smooth real Banach space which is also uniformly convex, C be a nonempty closed convex subset of E. Let $T_1, T_2, \cdots, T_N : C \to C$ be a λ-demicontractive mappings for some $\lambda \in (0,1)$ and L-Lipschitzian mapping. The common fixed point set is non-empty, there exist $T \in \{T_i : i \in I\}$ is demicompact, $\{x_n\}$ is the iterative sequence defined by $x_{n+1} = (1-a_n)x_n + a_n T x_n$, $T_n = T_{n \bmod N}$. Under suitable condition on $\{a_n\}$, this paper proves that $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of $T_1, T_2, \cdots, T_N$.

Key words: λ-demicontractive; uniformly smooth; iterative sequence; fixed point

(责任编辑 黄 颖)