运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20120115.1809.004

半 B-(p,r)-(预)不变凸函数与多目标分式规划问题的鞍点*

赵 勇[1,2],彭再云[2],徐先兵[3],唐 平[4]

(1. 重庆师范大学 数学学院,重庆 400047;2. 重庆交通大学 理学院,重庆 400074;
3. 重庆市荣昌仁义中学,重庆 402472;4. 重庆文理学院 数学与统计学院,重庆 402160)

摘要:本文定义了一类重要的非凸函数—半 B-(p,r)-(预)不变凸函数。首先举例说明了半 B-(p,r)-预不变凸函数的存在性,并说明它是 B-(p,r)-(预)不变凸函数的推广,是 B-不变凸函数和半预不变凸函数的真推广,从而是熟知的不变凸函数和凸函数的推广;然后,证明了可微的半 B-(p,r)-预不变凸函数一定是半 B-(p,r)-不变凸函数,并讨论了半 B-(p,r)-预不变凸函数的全局极小性质;最后,借助广义 Lagrange 向量函数给出了半 B-(p,r)-不变凸型多目标分式规划的鞍点最优性条件,其结论有一般性,推广了涉及不变凸函数、半预不变凸函数和 B-(p,r)-(预)不变凸函数文献的一些结论。

关键词:半-p-不变凸集;半 B-(p,r)-(预)不变凸函数;多目标分式规划;鞍点

中图分类号:O221.1 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)01-0018-09

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色;有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。Hanson[1] 在 1981 年给出了一类广义凸函数—不变凸函数,它是凸函数的推广。其后,大量文献利用这类函数讨论了规划问题的最优化理论。在 1991 年,Bector 和 Singh[2] 提出一类广义凸函数,称为 B-凸函数,并利用这类函数讨论了规划问题。其后,Bector 等[3] 和 Suneja 等[4] 提出一类将 B-凸函数作为特殊情形的广义 B-凸函数—B-预不变凸函数,并讨论了其非线性规划问题最优解的充分性条件及对偶性。Antczak[5-6] 在 2001 年,给出了 p-不变凸集的定义,并在此基础上提出 (p,r)-预不变凸函数,它是预不变凸函数[7] 的推广,并说明在可微条件下,它是 (p,r)-不变凸函数。在文献[8]中,Antczak 给出了一类更一般的广义凸函数— B-(p,r)-(预)不变凸函数,它既是 B-凸函数的推广,又是 (p,r)-预不变凸函数的推广形式,同样在可微条件下,B-(p,r)-预不变凸函数是 B-(p,r)-不变凸函数,并借助于这类函数研究了一类非线性规划问题的鞍点最优性条件和对偶问题。而另一方面,Yang 和 Chen[9] 在 1992 年提出了半预不变凸函数的概念,这类函数可看作不变凸函数的推广。在此基础上,Long 和 Peng[10] 于 2006 年提出了半-B-预不变凸函数的概念。

本文在文献[8-9,11-12]的启发下,对 B-(p,r)-(预)不变凸函数及相关性质进行了研究。

1 基本概念与例子

在这一部分里,先介绍以下几个相关的重要概念。

定义 1[1] 令 X 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集,称 X 为不变凸集,若存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ 使得 $\forall x,y\in X$,$\lambda\in[0,1]$,$y+\lambda\eta(x,y)\in X$。

定义 2[9] 称集合 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半连通集,如果对 $\forall x,y\in X$,$\lambda\in[0,1]$,$y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X$。

* 收稿日期:2011-07-15 修回日期:2011-08-05 网络出版时间:2012-01-15 18:09:00
资助项目:重庆市科委攻关项目(No. CSTC2011AC6104);重庆市教委资助项目(No. KJ100405;No. KJ080404);重庆市运筹学与控制论重点实验室资助项目(2010)
作者简介:赵勇,男,硕士研究生,研究方向为最优化理论与应用;通讯作者:彭再云,E-mail:pengzaiyun@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120115.1809.201201.18_004.html

定义 3[9]　称函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半预不变凸函数,如果对 $\forall x,y\in X$,$\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\lim_{\lambda\to 0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$$

定义 4[5]　设 $X\subset\mathbf{R}^n$,$\eta:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$,若对 $\forall x,y\in X$,$\lambda\in[0,1]$,下列关系成立

$$\log(\lambda e^{p\eta(x,y)+y}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}}\in X,p\neq 0;y+\lambda\eta(x,y)\in X,p=0$$

则称 X 是 p- 不变凸集。

定义 5[5]　设 $\eta:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$,$X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的 p- 不变凸集,若 $f:X\to\mathbf{R}$ 在 $y\in X$ 处对 $\forall x\in X$,$\lambda\in[0,1]$ 都有

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\log(\lambda e^{rf(x)}+(1-\lambda)e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),p=0,r=0$$

则称 f 是 X 上 $y\in X$ 处关于 η 的 (p,r)- 预不变凸函数。

定义 6[5]　令 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的 p- 不变凸集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是定义在 X 上的可微函数。若对 $\forall x\in X$,下列不等式成立

$$\frac{1}{r}e^{rf(x)}\geqslant\frac{1}{r}e^{rf(y)}[1+\frac{r}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x,y)}-1)],p\neq 0,r\neq 0$$

$$\frac{1}{r}e^{rf(x)}\geqslant\frac{1}{r}e^{rf(y)}[1+r\nabla f(y)\eta(x,y)],p=0,r\neq 0$$

$$f(x)-f(y)\geqslant\frac{1}{p}\nabla f(y)(e^{p\eta(x-y)}-1),p\neq 0,r=0$$

$$f(x)-f(y)\geqslant\nabla f(y)\eta(x,y),p=0,r=0$$

则称 f 是 X 上 $y\in X$ 处关于 η 的 (p,r)- 不变凸函数。

定义 7[8]　令 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$,$X$ 是关于 η 的非空 p- 不变凸集,$b:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$ 满足 $b(x,y,0)=0$,$b(x,y,1)=1$。若对 $\forall x\in X$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$,下列不等式成立

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p=0,r=0$$

则称 f 为 X 上 $y\in X$ 处关于 η,b 的 B-(p,r)- 预不变凸函数。

定义 8　设 $X\subset\mathbf{R}^n$,$\eta:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,若对 $\forall x,y\in X$,$\lambda\in[0,1]$,下列关系成立

$$\log(\lambda e^{p\eta(x,y,\lambda)+y}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}}\in X,p\neq 0;y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in X,p=0$$

则称 X 是半 -p- 不变凸集。

注 1　当 $p=0$ 时,半 -p- 不变凸集就是半连通集,任意凸集是关于 $\eta(x,y,\lambda)=x-y$ 的半 -p- 不变凸集。

注 2　当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$ 时,任意关于 $\eta(x,y)$ 的 p- 不变凸集都是关于 $\eta(x,y,\lambda)$ 的半 -p- 不变凸集,但反之不然。

下面举例说明存在非凸集是半 -p- 不变凸集,但不是 p- 不变凸集。

例 1　令 $X=[a,b]\cup[c,d]$,其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 和 $a\leqslant b<c\leqslant d$。则 X 不是关于 $\eta(x,y)=x-y$ 的 p- 不变凸集,但是关于 $\eta(x,y,\lambda)$ 的半 -p- 不变凸集,其中

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}x-y,a\leqslant x,y\leqslant b\vee c\leqslant x,y\leqslant d\\a+\lambda(b-a)-y,c\leqslant x\leqslant d\wedge a\leqslant y\leqslant b\\0,a\leqslant x\leqslant b\wedge c\leqslant y\leqslant d\end{cases}$$

下面给出半 B-(p,r)-预不变凸函数的定义。

定义9 令 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,$X$ 是关于 η 的非空半-p-不变凸集,$b: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$ 满足 $b(x,y,0)=0,b(x,y,1)=1$。若对 $\forall x\in X$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$,下列不等式成立

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p\neq 0,r\neq 0$$

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p\neq 0,r=0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}},p=0,r\neq 0$$

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y),p=0,r=0$$

且 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda e^{\eta(x,y,\lambda)}=0,\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$,则称 f 为 X 上 $y\in X$ 处关于 η,b 的半 B-(p,r)-预不变凸函数。

注3 当 $\eta(x,y,\lambda)=\eta(x,y)$ 时,任意关于 $\eta(x,y)$ 的 B-(p,r)-预不变凸函数都是关于 $\eta(x,y,\lambda)$ 的半 B-(p,r)-预不变凸函数,但反之不然。

注4 当 $p=0,r=0$ 时,任意关于 $\eta(x,y,\lambda)$、$b(x,y,\lambda)$ 的半 B-(p,r)-预不变凸函数是关于 $\bar{b}(x,y,\lambda)$ 与相同 $\eta(x,y,\lambda)$ 的半-$\bar{B}$-预不变凸函数(其中 $\bar{b}(x,y,\lambda)=\lambda b(x,y,\lambda)$)。

下面举例说明存在函数 f 是半 B-(p,r)-预不变凸函数但不一定是 B-(p,r)-预不变凸函数。

例2 令 $X=\mathbf{R}$,$f: X\to\mathbf{R}$,则 $f(x)=\ln(|x|+1)$ 不一定是 X 上关于 $\eta(x,y)=\begin{cases}x-y,|x|\geqslant|y|\\0,|x|<|y|\end{cases}$ 和 $b(x,y,\lambda)$ 的 B-$(0,1)$-预不变凸函数,却是 X 上关于 $\eta(x,y,\lambda)$ 和 $b(x,y,\lambda)$ 的半 B-$(0,1)$-预不变凸函数。其中

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}-\lambda y,|x|\geqslant|y|\\\lambda x-y,|x|<|y|\end{cases},b(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(1+x^2+y^2)}{\lambda+x^2+y^2},|x|\geqslant|y|,0\leqslant\lambda\leqslant 1\\0,|x|<|y|,0\leqslant\lambda<1\\2\lambda^2+3\lambda-4,|x|<|y|,\lambda=1\end{cases}$$

下面例子说明存在函数 f 是半 B-(p,r)-预不变凸函数但不是关于同一 η 的半预不变凸函数和关于同一 b 的 B-不变凸函数。

例3 令 $X=(0,\frac{\pi}{2})$,$f: X\to\mathbf{R}$,则 $f(x)=2\sin x$ 是 X 上关于 $\eta(x,y,\lambda)$ 和 $b(x,y,\lambda)$ 的半-B-$(0,0)$-预不变凸函数。其中

$$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\sin x-\sin y)}{\sin y},x\geqslant y,0\leqslant\lambda\leqslant 1\\0,x<y,0\leqslant\lambda<1\\\lambda x-y,x<y,\lambda=1\end{cases},b(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda,x\geqslant y,0\leqslant\lambda\leqslant 1\\0,x<y,0\leqslant\lambda<1\\1,x<y,\lambda=1\end{cases}$$

但当取 $x=\frac{\pi}{6},y=\frac{\pi}{4},\lambda=\frac{1}{2}$ 时

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

则 f 不是 X 上关于同一 η 的半预不变凸函数;

当取 $x=\frac{\pi}{3},y=\frac{\pi}{6},\lambda=\frac{1}{2}$ 时

$$f(y+\lambda(x-y))>b(x,y,\lambda)f(x)+(1-b(x,y,\lambda))f(y)$$

则 f 不是 X 上关于同一 b 的 B-不变凸函数。

注5 例2、3表明半 B-(p,r)-预不变凸函数是 B-(p,r)-预不变凸函数的推广,是 B-不变凸函数,半预不变凸函数的真推广。

与不可微情形类似,下面引入可微条件下的半 B-(p,r)-不变凸函数的概念。

定义10 设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是非空半-p-不变凸集,$b: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}_+$ 满足 $b(x,y,0)=0,b(x,y,1)=1$,$f: X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的可微函数,p,r 是任意实数,若对 $y\in X,\forall x\in X$,存在向量函数 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 使

得

$$\frac{1}{r}b(x,y,\lambda)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqslant\frac{1}{p}\nabla f(y)(\eta_1(x,y)-I),p\neq0,r\neq0$$

$$\frac{1}{r}b(x,y,\lambda)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqslant\nabla f(y)\eta_2(x,y),p=0,r\neq0$$

$$f(x)-f(y)\geqslant\frac{1}{p}\nabla f(y)(\eta_1(x,y)-I),p\neq0,r=0$$

$$f(x)-f(y)\geqslant\nabla f(y)\eta_2(x,y),p=0,r=0$$

成立,其中

$$\lim_{\lambda\to0}\lambda e^{\eta(x,y,\lambda)}=0,\lim_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0,\eta_1(x,y)=\frac{d}{d\lambda}[\lambda e^{p\eta(x,y,\lambda)}]\Big|_{\lambda=0},\eta_2(x,y)=\frac{d}{d\lambda}[\lambda\eta(x,y,\lambda)]\Big|_{\lambda=0}$$

则称 f 为 X 上在 y 点关于 η 的半 B-(p,r)-不变凸函数。若在不等式中,当 $x\neq y$ 时为严格的,则称 f 为 X 上在 y 点关于 η 的严格半 B-(p,r)-不变凸函数,其中 $I=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^n$。

2 基本性质

定理 1　设 $X\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半-p-不变凸集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的可微函数。若 f 为 X 上关于 η 的半 B-(p,r)-预不变凸函数,则 f 为 X 上关于 η 的半 B-(p,r)-不变凸函数。

证明　此定理只证明 $p\neq0,r\neq0$ 的情况,其他情形可类似地证明。

不妨设 $r\geqslant0$,由 f 的定义得

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}$$

则

$$\frac{e^{rf(y)}[e^{r[f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})-f(y)]}-I]}{\lambda}\leqslant b(x,y,\lambda)(e^{rf(x)}-e^{rf(y)})$$

令 $\lambda\to0$,有 $b(x,y,\lambda)(e^{rf(x)}-e^{rf(y)})\geqslant e^{rf(y)}\dfrac{r}{p}\nabla f(y)(\eta_1(x,y)-I)$,即

$$\frac{1}{r}b(x,y,\lambda)(e^{r(f(x)-f(y))}-1)\geqslant\frac{1}{p}\nabla f(y)(\eta_1(x,y)-I)$$

其中 $\eta_1(x,y)=\dfrac{d}{d\lambda}[\lambda e^{p\eta(x,y,\lambda)}]\Big|_{\lambda=0}$。　　证毕

定理 2　令 X 是关于 η 的半-p-不变凸集,$f:X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的关于 η 的半 B-(p,r)-预不变凸函数,则 1)函数 f 的每一个局部最小值点是它的全局最小值点;2)f 的全局最小值点集是关于 η 的半-p-不变凸集。

证明　1)假设 $\bar{x}\in X$ 是 f 的局部最小值点,但不是全局最小值点。则存在 $\tilde{x}\in X$ 使得 $f(\tilde{x})<f(\bar{x})$。由假设知,f 是 X 上关于 η 的半-B-(p,r)-预不变凸函数,则对 $\forall x,\bar{x}\in X$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$,下列不等式成立

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,\bar{x},\lambda)+\bar{x})}+(1-\lambda)e^{p\bar{x}})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x,\bar{x},\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,\bar{x},\lambda))e^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}$$

特别地,令 $x=\tilde{x}$,则上式化为

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)+\bar{x})}+(1-\lambda)e^{p\bar{x}})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda)e^{rf(\tilde{x})}+(1-\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda))e^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}$$

因为 $f(\tilde{x})<f(\bar{x})$,则

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)+\bar{x})}+(1-\lambda)e^{p\bar{x}})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda)e^{rf(\tilde{x})}+(1-\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda))e^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}<$$
$$\log(\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda)e^{rf(\bar{x})}+(1-\lambda b(\tilde{x},\bar{x},\lambda))e^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}=\log(e^{rf(\bar{x})})^{\frac{1}{r}}=f(\bar{x})$$

于是对 $\forall\lambda\in[0,1]$,有 $f(\log(\lambda e^{p(\eta(\tilde{x},\bar{x},\lambda)+\bar{x})}+(1-\lambda)e^{p\bar{x}})^{\frac{1}{p}})<f(\bar{x})$。

令 $\lambda\to0$,得 $f(\bar{x})<f(\bar{x})$。矛盾,即结论得证。

2)记 A 是 f 的全局最小值点集。令 x 和 y 是 A 中的任意两点,则 $f(x)=f(y)$。又由于 f 是 X 上关于 η 的半 B-(p,r)-预不变凸函数,则有

$$f(\log(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py})^{\frac{1}{p}})\leqslant\log(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(y)})^{\frac{1}{r}}=$$

$$\log\left(\lambda b(x,y,\lambda)e^{rf(x)}+(1-\lambda b(x,y,\lambda))e^{rf(x)}\right)^{\frac{1}{r}}=\log\left(e^{rf(x)}\right)^{\frac{1}{r}}=f(x)$$

$$f\left(\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\leqslant f(x)=f(y),\forall\lambda\in[0,1]$$

由于 x 和 y 是 f 的全局最小值点,所以

$$\log\left(\lambda e^{p(\eta(x,y,\lambda)+y)}+(1-\lambda)e^{py}\right)^{\frac{1}{p}}\in A,\forall\lambda\in[0,1]$$

即 f 的全局最小值点集是关于 η 的半-p-不变凸集。 证毕

3 半-B-(p,r)-不变凸型多目标分式规划的鞍点最优性条件

为了方便起见引入以下几个符号,设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。$x=y$ 是指 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x<y$ 是指 $x_i<y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leqq y$ 是指 $x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$;$x\leqslant y$ 是指 $x\leqq y$,而 $x\neq y$。

考虑如下的最优性问题(P)

$$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$$
$$\text{s.t.}\quad g(x)\leqq 0,x\in X$$

其中 $f:X\to\mathbf{R},g:X\to\mathbf{R}^m$ 是 X 上的可微函数。设 D 为(P)的可行解集,则 $D=\{x\in X:g(x)\leqq 0\}$。

定义 11[11] 设 x^* 是问题(P)的可行解,若不存在(P)的其它可行解 x,使得 $f(x)\leqslant f(x^*)$ 成立,则称 x^* 是问题(P)的有效解。

下面在半 B-(p,r)-不变凸型约束下,讨论如下的多目标分式规划问题(FP)

$$\min\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\frac{f_2(x)}{g_2(x)},\cdots,\frac{f_m(x)}{g_m(x)}\right)$$
$$\text{s.t.}\quad h_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,k$$
$$x\in X$$

其中 X 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空开集,$f_i,g_i:X\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,m),h_j:X\to\mathbf{R}(j=1,2,\cdots,k)$ 为 X 上的可微函数,$g_i(x)>0(i=1,2,\cdots,m)$。

文献[13]中给出了目标函数不含分母的多目标规划问题的广义 Lagrange 向量函数定义,同理可得到多目标分式规划问题(FP)的广义 Lagrange 向量函数 $L(x,u)$

$$L(x,u)=(L_1(x,u),L_2(x,u),\cdots,L_m(x,u))$$

其中 $L_i(x,u)=\dfrac{f_i(x)}{g_i(x)}+\sum\limits_{j=1}^{k}u_j\dfrac{h_j(x)}{g_i(x)}(i=1,2,\cdots,m),u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\geqq 0,x\in X$。

定义 12 设 $\bar{u}\in\mathbf{R}_+^k,\bar{x}\in X$,若 $\forall u\in\mathbf{R}_+^k,\forall x\in X$ 有 $L(\bar{x},u)\leqq L(\bar{x},\bar{u})\leqq L(x,\bar{u})$,则称 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。

定理 3 若 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点,且 $g_i(\bar{x})>0(i=1,2,\cdots,m)$,则 $\bar{x}$ 为(FP)的有效解,且 $\sum\limits_{j=1}^{k}\bar{u}_jh_j(\bar{x})=0$。

其证明与文献[13]中定理 4.2 类似,故在此略。

引理 1[14] (F-J 最优必要性条件)设 $\bar{x}$ 为(FP)的有效解,$\bar{y}_i=\dfrac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}(i=1,2,\cdots,m)$,则存在 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\geqq 0,\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\geqq 0,(\alpha,\mu)\neq(0,0)$,使得下列结论成立:a) $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\nabla f_i(\bar{x})-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_j\nabla h_i(\bar{x})=0$;b) $\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_jh_j(\bar{x})=0$。

以下所有的证明只考虑 $p\neq 0,r\neq 0$ 的情形,其他情形类似地可以证明。

定理 4 设 $\bar{x}$ 为(FP)的可行解,若存在 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\geqq 0,\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\geqq 0$ 使得引理 1 中的结论 a),b)成立,且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_if_i(x)-\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_ig_i(x)+\sum\limits_{j=1}^{k}\mu_jh_j(x)$ 在 $\bar{x}$ 处为关于向量函数 $\eta(x,\bar{x},\lambda)$ 和函数 $b(x,$

$\bar{x},\lambda)$ 的严格半 B-(p,r)- 不变凸函数，则 $\bar{x}$ 为 (FP) 的有效解。当令 $\bar{u}=(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_k)=\left(\frac{\mu_1}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i},\frac{\mu_2}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i},\cdots,\frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}\right)\geqq 0$,则$(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。

证明　1)对任意的可行解 $x(x\neq\bar{x})$,由 f 是严格半 B-(p,r)- 不变凸函数的定义得,对(FP) 的任意可行解 $x\in D(x\neq\bar{x})$,有

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x},\lambda)\left(e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1\right)>$$

$$\frac{1}{p}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\nabla f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i\nabla g_j(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j\nabla h_j(\bar{x})\right](\eta_1(x,\bar{x})-I)$$

于是由条件 a)得

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x},\lambda)\left(e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1\right)>0$$

即

$$e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1>0$$

从而 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)>\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x})$。

由 $\bar{y}_i=\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}(i=1,2,\cdots,m)$ 及条件 b),得

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)>0$$

因为 x 是(FP) 的可行解,则有 $h_j(x)\leqq 0(j=1,2,\cdots,k)$, 从而

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)\geq\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)>0$$

即不存在 (FP) 的任意可行解 x ,使得

$$\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\frac{f_2(x)}{g_2(x)},\cdots,\frac{f_m(x)}{g_m(x)}\right)\leq\left(\frac{f_1(\bar{x})}{g_1(\bar{x})},\frac{f_2(\bar{x})}{g_2(\bar{x})},\cdots,\frac{f_m(\bar{x})}{g_m(\bar{x})}\right)=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\cdots,\bar{y}_m)$$

成立,所以 $\bar{x}$ 为(FP) 的有效解。

2)由证明 1)知 $\bar{x}$ 为(FP) 的有效解,由引理 1 知存在 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\geqq 0,\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k)\geqq 0$,$(\alpha,\mu)\neq(0,0)$,使得 a),b) 成立。由严格半 B-(p,r)- 不变凸函数的定义得,对(FP) 的任意可行解 $x(x\neq\bar{x})$,有

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x},\lambda)\left(e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1\right)>$$

$$\frac{1}{p}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\nabla f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i\nabla g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j\nabla h_j(\bar{x})\right](\eta_1(x,\bar{x})-I)$$

于是由条件 a)得

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x},\lambda)\left(e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1\right)>0$$

即

$$e^{r[(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x))-(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x}))]}-1>0$$

从而

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)>\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(\bar{x})-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(\bar{x})$$

由 $\bar{y}_i=\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})},i=1,2,\cdots,m$ 及条件 b),有

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\bar{y}_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j h_j(x)>0\tag{1}$$

又 x 为(FP)的可行解,则 $h_j(x) \leqq 0(j,1,2,\cdots,k)$,则由上式可得 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) \neq 0$,于是当 $\bar{u}_j = \frac{\mu_j}{\sum_{i=1}^m \alpha_i}(j = 1,2,\cdots,k)$ 时,有

i)当 $L(\bar{x},\bar{u}) \geqslant L(x,\bar{u})$,必存在 p,$1 \leqslant p \leqslant m$,$L_p(x,\bar{u}) < L_p(\bar{x},\bar{u})$,而 $q \neq p$,$1 \leqq q \leqq m$ 时,$L_q(x,\bar{u}) \leqq L_q(\bar{x},\bar{u})$。于是由条件b)及 $\bar{y}_i$ 的定义有

$$L_p(x,\bar{u}) - L_p(\bar{x},\bar{u}) = \frac{1}{g_p(x)}[f_p(x) - \bar{y}_p g_p(x) + \sum_{j=1}^k \bar{u}_j h_j(x)] < 0$$

$$L_q(x,\bar{u}) - L_q(\bar{x},\bar{u}) = \frac{1}{g_q(x)}[f_q(x) - \bar{y}_q g_q(x) + \sum_{j=1}^k \bar{u}_j h_j(x)] \leqq 0$$

由
$$f_p(x) - \bar{y}_p g_p(x) + \sum_{j=1}^k \bar{u}_j h_j(x) < 0$$

$$f_q(x) - \bar{y}_q g_q(x) + \sum_{j=1}^k \bar{u}_j h_j(x) \leqq 0, g_i(x) > 0(i = 1,2,\cdots,m)$$

又因为 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) \geqq 0$,$\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \geqq 0$,$(\alpha,\mu) \neq (0,0)$,及 $\bar{u}_j$ 的定义知

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k \mu_j h_j(x) \leqq 0$$

与(1)式矛盾,所以 $L(\bar{x},\bar{u}) \leqq L(x,\bar{u})$。

ii)因为 $\sum_{j=1}^k u_j h_j(x) \leqq 0 = \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j h_j(\bar{x})}{\sum_{i=1}^m \alpha_i} = \sum_{j=1}^k \bar{u}_j h_j(\bar{x})$,$\forall u \in \mathbf{R}_+^k$,所以有如下不等式成立

$$\frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} + \sum_{j=1}^k u_j \frac{h_j(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} \leqq \frac{f_i(\bar{x})}{g_i(\bar{x})} + \sum_{j=1}^k u_j \frac{h_j(\bar{x})}{g_i(\bar{x})}$$

即 $L_i(\bar{x},u) \leqq L_i(\bar{x},\bar{u})(i = 1,2,\cdots,m)$,所以 $L(\bar{x},u) \leqq L(\bar{x},\bar{u})$。

于是综上得 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。 证毕

引理2[14] 设 $\bar{x}$ 为(FP)的有效解,且 $h_j(x)(j = 1,2,\cdots,k)$ 满足K-T约束规格,则存在

$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) > 0, \mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \geqq 0$$

使得引理1中的结论a)、b)成立。

定理5 设 $\bar{x}$ 为(FP)的有效解,且 $h_j(x)(j = 1,2,\cdots,k)$ 满足K-T约束规格,对引理2中的 α,μ,$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k \mu_j h_j(x)$ 在 $\bar{x}$ 处为关于向量函数 $\eta(x,\bar{x},\lambda)$ 和函数 $b(x,\bar{x},\lambda)$ 的半 B-(p,r)-不变凸函数,则存在 $\bar{u} = (\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_k) \geqq 0$,使 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。

证明 由引理2得存在 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) > 0$,$\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \geqq 0$ 使得引理1中的结论a)、b)成立。

由半 B-(p,r)-不变凸函数的定义得,对(FP)的任意可行解 $x(x \neq \bar{x})$,有

$$\frac{1}{r}b(x,y,\lambda)(\mathrm{e}^{r[(\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k \mu_j h_j(x)) - (\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \mu_j h_j(\bar{x}))]} - 1) \geqq$$
$$\frac{1}{p}[\sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i \nabla g_j(\bar{x}) + \sum_{j=1}^k \mu_j \nabla h_j(\bar{x})](\eta_1(x,\bar{x}) - I)$$

类似于定理4的证明,有

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k u_j h_j(x) \geqq 0 \tag{2}$$

又由题意知,$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) > 0$,则可令 $\bar{u}_j = \frac{\mu_j}{\sum_{i=1}^m \alpha_i}(j = 1,2,\cdots,k)$。

1)当 $L(\bar{x},\bar{u}) \geqslant L(x,\bar{u})$,同定理 4 的证明,可得

$$f_p(x) - \bar{y}_p g_p(x) + \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_j h_j(x) < 0$$

$$f_q(x) - \bar{y}_q g_q(x) + \sum_{j=1}^{k} \bar{u}_j h_j(x) \leqq 0,(p \neq q, 1 \leqq p, q \leqq m)$$

由 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) > 0$,$\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \geqq 0$ 及 $\bar{u}_j$ 的定义知

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x) < 0$$

与(2)式矛盾,所以 $L(\bar{x},\bar{u}) \leqq L(x,\bar{u})$。

2)同理类似定理 4,可证 $L(\bar{x},u) \leqq L(\bar{x},\bar{u})$。

于是综上得 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。　　证毕

定理 6　设 $\bar{x}$ 为(FP)的可行解,若存在 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) > 0$,$\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_k) \geqq 0$ 使得引理 1 中的结论 a)、b)成立,且 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x)$ 在 $\bar{x}$ 处为关于向量函数 $\eta(x,\bar{x},\lambda)$ 和函数 $b(x,\bar{x},\lambda)$ 的半 B-(p,r)-不变凸函数,则 $\bar{x}$ 为(FP)的有效解。当令

$$\bar{u} = (\bar{u}_1,\bar{u}_2,\cdots,\bar{u}_k) = \left(\frac{\mu_1}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i},\frac{\mu_2}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i},\cdots,\frac{\mu_k}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}\right) \geqq 0$$

则 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。

其证明与定理 4、定理 5 的证明类似,故略去。

下面举例验证(鞍点充分性条件)定理 6 的正确性。

例 4　考虑如下多目标规划问题(FP)

其目标函数为　$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)},\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right) = \left(\frac{x-1}{2},x\right)$$

约束函数为　$$h_1(x) = 1 - x \leqslant 0, h_2(x) = 1 - x \leqslant 0$$

则(FP)的可行解集为 $D = \{x \in \mathbf{R}: x \geqslant 1\}$,且 $\bar{x} = 1$ 是(FP)的可行解。

首先验证 F-J 必要性条件:当取 $\alpha_1 = \frac{1}{2}$,$\alpha_2 = \frac{1}{2}$,$\mu_1 = 0$,$\mu_2 = 1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \nabla f_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{y}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \nabla h_i(\bar{x}) = 0, \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(\bar{x}) = 0$$

即引理 1 中的结论 a)、b)成立。又由定义 10 可得 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x) - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{y}_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j h_j(x)$ 在 $\bar{x}$ 处为关于向量函数 $\eta(x,\bar{x},\lambda)$ 和函数 $b(x,\bar{x},\lambda)$ 的半 B-$(1,1)$-不变凸函数,其中

$$\eta(x,\bar{x},\lambda) = \begin{cases} -\lambda\bar{x}, & |x| \geqslant |\bar{x}| \\ \lambda x - \bar{x}, & |x| < |\bar{x}| \end{cases}, \quad b(x,\bar{x},\lambda) = \begin{cases} \lambda, & x \geqslant \bar{x}, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \\ 0, & x < \bar{x}, 0 \leqslant \lambda < 1 \\ 1, & x < \bar{x}, \lambda = 1 \end{cases}$$

于是满足定理 6 的假设,故可得到 $\bar{x} = 1$ 为(FP)的有效解。

特别地,令 $\bar{u} = (\bar{u}_1,\bar{u}_2) = \left(\frac{\mu_1}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i},\frac{\mu_2}{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}\right) = (0,1) \geqq 0$,则可得到 $L(\bar{x},u) \leqq L(\bar{x},\bar{u}) \leqq L(x,\bar{u})$。故 $(\bar{x},\bar{u})$ 为 $L(x,u)$ 的鞍点。

参考文献:

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions [J]. J Math Anal Appl, 1981, 80: 545-550.

[2] Bector C R, Singh C. *B*-vex functions [J]. J Optim Theory Appl, 1991, 71: 237-253.

[3] Bector C R, Singh C, Lalitha C S. Generalized *B*-vex func-

tions and generalized B-vex programming[J]. J Optim Theory Appl, 1993, 76: 561-576.

[4] Suneja S K, Singh C, Bector C R. Generalization of preinvex and B-Vex functions [J]. J Optim Theory Appl, 1993, 76: 577-587.

[5] Antczak T. (p,r)-Invex sets and functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 263: 355-379.

[6] Antczak T. On (p,r)-invexity-type nonlinear programming problems[J]. J Math Anal Appl, 2001, 264: 382-397.

[7] Ben-Israel A, Mond B. What is invexity?[J]. J Mustral Math Soc(Ser B), 1986, 28: 1-9.

[8] Antczak T. A class of B-(p,r)-invex functions and mathematical programming[J]. J Math Anal Appl, 2003, 286: 187-206.

[9] Yang X Q, Chen G Y. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1992, 169(2): 359-373.

[10] Long X J, Peng J W. Semi-B-preinvex functions[J]. J Optim Theory Appl, 2006, 131: 301-305.

[11] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. On properties of semipreinvex functions [J]. Bull Austral Math Soc, 2003, 68: 449-459.

[12] 彭再云,万轩. B-(p,r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶问题与极小化问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2010, 27(6): 1-6.

[13] Mishra S K. On multiple-objective optimization with generalized univexity[J]. J Math Anal Appl, 1998, 224: 131-148.

[14] 林锉云,董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春:吉林教育出版社,1992.

[15] 赵克全,陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2008, 25(2): 1-3.

[16] Bector C R. Duality for multiobjective B-Vex programming involving n-set functions [J]. J Math Anal Appl, 1996, 202: 701-726.

Operations Research and Cybernetics

Semi-B-(p,r)-(pre)-invex Functions and the Saddle Point of Multiobjective Fractional Programming Problems

ZHAO Yong[1,2], *PENG Zai-yun*[2], *XU Xian-bing*[3], *TANG Ping*[4]

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. School of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
3. Chongqing Rong Chang Ren Yi Middle School, Chongqing 402472;
4. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: In this paper, a class of important nonconvex functions——semi-B-(p,r)-pre-invex functions is defined. Firstly, examples are given to show that there exists functions which are semi- B-(p,r)-pre-invex functions. Meanwhile, we also show that it is generalization of B-(p, r)-pre-invex functions, and true generalization of B-invex functions and semipreinvex functions, thus it is the generalization of well-known convexity functions and invexity functions. Secondly, the result which differentiable semi-B-(p, r)-preinvex function must be semi-B-(p, r)-invex function is proved, and the global minimized property of semi-B-(p,r)-preinvex functions is discussed. Finally, by using generalization Lagrange vector functions, the saddle point optimality conditions of a multiobjective fractional programming problem under semi-B-(p, r)-invexity are established. The work generalizes many results about programming problems under the constraint of invex functions, semipreinvex functions and B-(p, r)-(pre)-invex functions.

Key words: semi-p-invex sets; semi-B-(p, r)-(pre)-invex functions; multiobjective fractional programming; saddle point

(责任编辑 黄 颖)