运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N. 20120314. 1927. 002

非光滑半无限多目标规划的最优性及混合对偶*

万　轩，赵克全
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：本文研究了非光滑半无限多目标规划(NSIMP)的最优性条件及混合型对偶。首先，在 Fritz-John 必要条件的基础上建立了 Karush-Kuhn-Tucker 必要条件，即设 $\bar{x}$ 为(NSIMP)的有效解和 $g_j, j\in(\bar{x})$ 为关于 η 的严格不变凸函数，则存在 $\bar{\lambda}\geqq 0, \mu_j\geqslant 0, \forall j\in J$ 且 $\bar{\mu}_j\neq 0$ 对有限多个 $j\in J$，使得(4)-(6)成立。然后建立了 Karush-Kuhn-Tucker 充分条件，即设 $\bar{x}$ 为(NSIMP)的可行解，在 $\bar{x}$ 处满足 Karush-Kuhn-Tucker 条件(4)-(6)式，$f_i, i\in I$ 是关于 η 的不变凸函数，$g_j, j\in J(\bar{x})$ 是关于相同 η 的严格不变凸函数，则 $\bar{x}$ 为(NSIMP)的有效解。最后在不变凸性条件下，证明了混合对偶模型的弱对偶，强对偶和逆对偶定理。本文的主要结果推广并改进了一些已有的结论。

关键词：非光滑半无限多目标规划；最优性条件；混合型对偶

中图分类号：O221. 2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2012)02-0007-05

一个具有有限个的变量和无穷多约束优化问题称为半无限规划问题(SIP)。半无限规划的研究主要集中在理论和算法 2 个方面。理论方面主要包括可行域的结构及其稳定性分析、对偶理论、最优性条件等；算法方面主要包括算法设计、收敛性分析以及数值稳定性等，如中心切平面法、Newton-型法、SQP 法、极大熵法和罚方法等。

本文考虑以下带不等式约束的非光滑半无限多目标规划问题(NSIMP)

$$(\text{NSIMP})\quad \min\quad f(x)=(f_1(x),\cdots,f_k(x))$$
$$\text{s. t.}\quad x\in D:=\{x\in X\mid g_j(x)\leqslant 0, j\in J\}$$

其中 J 为(无穷)指标集，$f_i:X\to\mathbf{R}, i\in I=\{1,\cdots,k\}$ 和 $g_j:X\to\mathbf{R}, j\in J$ 在非空开集 $X\in\mathbf{R}^n$ 上都是 Lipschitz 函数。

近些年来，随着应用科学的推动，许多作者讨论了半无限规划问题在多种情况下的最优性条件及对偶问题[1-13]。其中 Mishra 等在文献[10]中讨论了非光滑半无限单目标优化问题的 Wolfe、Mond-weir 对偶问题；Kanzi 在文献[11]中讨论了非光滑半无限单目标优化问题的 Karush-Kuhn-Tucker 必要条件；Mishra 等在文献[12]中讨论了在极限次微分下的非光滑半无限单目标优化问题的必要条件、充分条件以及 Wolfe、Mond-weir 对偶问题。

本文在文献[10-11]的基础上研究了非光滑半无限多目标规划在不变凸性上的最优性条件及混合对偶。

1 预备知识

在本文中，为了方便起见，引入以下几个符号，设 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，$x=y\Leftrightarrow x_i=y_i$，$\forall i=1,\cdots,n$，$x<y\Leftrightarrow x_i<y_i$，$\forall i=1,\cdots,n$，$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i$，$\forall i=1,\cdots,n$，$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i$，$\forall i=1,\cdots,n$，且最少存在一个 j，使得 $x_j<y_j$。

为了得到主要结果，首先引进下面的定义。

定义 1[14]　称非空集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 是不变凸集，如果对任意 $x,y\in X$，$\lambda\in[0,1]$，使得 $y+\lambda\eta(x,y)\in X$。

* 收稿日期：2011-08-10　　网络出版时间：2012-03-14 19:27:00
资助项目：重庆市自然科学基金项目(No. 2011BA0030)；重庆市科委运筹学与系统工程重点实验室项目(No. CSTC2011KLORSE02)；重庆市教委科技项目(No. KJ110625)
作者简介：万轩，男，硕士研究生，研究方向为最优化理论及其应用；通讯作者：赵克全，E-mail：kequanz@163. com
网络出版地址：http://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20120314. 1927. 201202. 7_002. html

定义2[15] 设非空集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$,称函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 在 $z\in X$ 为局部Lipschitz的,如果存在一个正常数 K 和 z 的一个领域 $N_\delta(z)$,对任意的 $x,y\in N_\delta(z)$,使得 $|f(y)-f(z)|\leqslant K\|y-z\|$,称 f 在 X 上局部Lipschitz的,如果它在 X 上任意点都是局部Lipschitz的。

定义3[15] 局部Lipschitz函数 f 在 $x\in X$ 处以 $v\in\mathbf{R}^n$ 为方向的Clarke广义方向梯度定义如下 $f^0(x;v)=\limsup\limits_{y\to x\ \lambda\downarrow 0}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$,和 f 在 $x\in X$ 处的Clarke广义次微分定义如下:$\partial^c f(x)=\{\xi\in\mathbf{R}^n;f^0(x;v)\geqslant\langle\xi,v\rangle,\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

定义4[16] 设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 关于 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$ 是不变凸集,$f:X\to\mathbf{R}^n$ 在 $x\in X$ 是局部Lipschitz函数,称 f 为关于相同 η 的不变凸函数,如果对任意 $x,y\in X,\xi\in\partial^c f(x)$,使得 $f(x)-f(y)\geqslant\langle\xi,\eta(x,y)\rangle$。

若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 f 关于相同 η 的严格不变凸函数。

定义5[17] $\bar{x}\in D$ 是问题(NMSIP)的有效解当且仅当不存在 $x\in D$ 使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$。

2 (NSIMP)的最优性条件

定理1[15] (Fritz John必要条件)设 $\bar{x}\in D$ 为(NMSIP)的有效解,则存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_k)\geqq 0,\mu_j\geqslant 0,\forall j\in J$ 且 $\bar{\mu}_j\neq 0$ 对有限多个 $j\in J,(\bar{\lambda},\bar{\mu})\neq 0$ 使得

$$0\in\sum_{i\in I}\bar{\lambda}\partial^c f_i(\bar{x})+\sum_{j\in J}\bar{\mu}\partial^c g_j(\bar{x})\tag{1}$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0,\forall j\in J\tag{2}$$

$$\bar{\lambda}\geqq 0,\bar{\mu}\geqq 0,\text{且}\bar{\mu}_j\neq 0\text{对有限多个}j\in J,(\bar{\lambda},\bar{\mu})\neq 0\tag{3}$$

设 $J(z)$ 表示的约束指标集,其中相应的乘数是在点 $z\in D$ 为正数,即 $J(z):=\{j\in J;\mu_j>0\}$。

定理2 (Karush-Kuhn-Tucker必要条件)设 $\bar{x}\in D$ 为(NSIMP)的有效解,假设 $g_j,j\in J(\bar{x})$ 为关于 η 的严格不变凸函数,则存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_k)\geqq 0,\mu_j\geqslant 0,\forall j\in J$ 且 $\bar{\mu}_j\neq 0$ 对有限多个 $j\in J$,使得

$$0\in\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\partial^c f_i(\bar{x})+\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\partial^c g_j(\bar{x})\tag{4}$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0,\forall j\in J\tag{5}$$

$$\bar{\lambda}\geqslant 0,\bar{\mu}\geqq 0,\text{且}\bar{\mu}_j\neq 0\text{对有限多个}j\in J\tag{6}$$

证明 因为 $\bar{x}\in D$ 为(NMSIP)的有效解,则利用定理1知,存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_k)\geqq 0,\bar{\mu}_j\geqslant 0,\forall j\in J$ 且 $\bar{\mu}_j\neq 0$ 对有限多个 $j\in J,(\bar{\lambda},\bar{\mu})\neq 0$,使得(1)~(3)式成立。则只需要证明 $\bar{\lambda}\neq 0$。假设 $\bar{\lambda}=0$,注意到 $\mu_j=0,j\notin J(\bar{x})$,则由(1)、(2)式可得 $0\in\sum\limits_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\partial^c g_j(\bar{x})$,即存在 $\hat{\zeta}_j\in\partial^c g_j(\bar{x}),j\in J(\bar{x})$,使得 $\sum\limits_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\hat{\zeta}_j=0$。因此,对任意 $x\in D$ 有

$$\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\langle\hat{\zeta}_j,\eta(x,\bar{x})\rangle=0\tag{7}$$

利用 $g_j,j\in J(\bar{x})$ 为严格不变凸函数及(2)、(7)式,可得

$$\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j g_j(x)>\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0$$

这与 $x\in D$ 有 $g_j(x)\leqslant 0$ 及 $\bar{\mu}_j(x)>0,j\in J(\bar{x})$ 矛盾。所以存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_k)\geqslant 0,\bar{\mu}_j\geqslant 0,\forall j\in J$ 且 $\bar{\mu}_j\neq 0$ 对有限多个 $j\in J$,使得(4)~(6)式成立。 证毕

定理3 (Karush-Kuhn-Tucker充分条件)设 $\bar{x}\in D$ 为(NSIMP)的可行解,假设在 $\bar{x}$ 处满足Karush-Kuhn-Tucker条件(4)~(6)式,$f_i,i\in I$ 是关于 η 的不变凸函数,$g_i,j\in J(\bar{x})$ 是关于相同 η 的严格不变凸函数,则 $\bar{x}$ 为(NSIMP)的有效解。

证明 假设 $\bar{x}$ 不是(NSIMP)的有效解,则存在 $\hat{x}\in D$,使得 $f(\hat{x})\leqslant f(\bar{x})$,则

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f(\hat{x})\leqslant\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f(\bar{x})\tag{8}$$

因为在 $\bar{x}$ 处满足Karush-Kuhn-Tucker条件(4)~(6)式,由(5)式可得,对任意 $j\in J(\bar{x})$ 有 $\bar{\mu}_j g_j(\hat{x})\leqslant\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0$,则 $g_j(\hat{x})\leqslant g_j(\bar{x})=0$。由 $g_j,j\in J(\bar{x})$ 的严格不变凸性知,对任意 $\zeta_j\in\partial^c g_j(\bar{x}),j\in J(\bar{x})$,有

$$\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\langle\zeta_j,\eta(\hat{x},\bar{x})\rangle<0 \tag{9}$$

又由于(4)式即为存在 $\hat{\xi}\in\partial^c f_i(\bar{x})$,$i\in I$,$\hat{\zeta}_j\in\partial^c g_j(\bar{x})$,$j\in J$,使得

$$0=\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\hat{\xi}_i+\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\hat{\zeta}_j=\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\hat{\xi}_i+\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\hat{\zeta}_j$$

则

$$0=\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\langle\hat{\xi}_i,\eta(\hat{x},\bar{x})\rangle+\sum_{j\in J(\bar{x})}\bar{\mu}_j\langle\hat{\zeta}_j,\eta(\hat{x},\bar{x})\rangle \tag{10}$$

由(9)、(10)式,得

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\langle\hat{\xi}_i,\eta(\hat{x},\bar{x})\rangle>0 \tag{11}$$

另一方面,由 f_i,$i\in I$ 的不变凸性,对任意 $\xi_i\in\partial^c f_i(\bar{x})$,$i\in I$,使得

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\hat{x})-\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{x})\geqslant\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\langle\xi_i,\eta(\hat{x},\bar{x})\rangle \tag{12}$$

结合(11)、(12)式,可得 $\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\hat{x})>\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{x})$,这与(8)式矛盾。所以 $\bar{x}$ 为(NSIMP)的有效解。　证毕

3 混合型对偶

本节给出非光滑半无限多目标规划问题(NSIMP)的混合型对偶问题(MSID),并建立混合型对偶定理。下面给出混合型对偶模型。

$$\begin{aligned}
\text{(MSID)}\quad \max\quad & f(y)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e\\
\text{s. t.}\quad & 0\in\sum_{i\in I}\lambda_i\partial^c f_i(y)+\sum_{j\in J}\mu_j\partial^c g_j(y)\\
& \sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)\geqslant 0\\
& \lambda\in\mathbf{R}^k_+,\lambda\geqslant 0,\sum_{i\in I}\lambda_i=1,e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^k\\
& \mu_j\geqslant 0,\forall j\in J,\text{且 }\mu_j\neq 0\text{ 对有限多个 }j\in J
\end{aligned}$$

定理 4　(弱对偶)设 x 和 (y,λ,μ) 分别是(NSIMP)和(MSID)的可行解。如果 f_i,$i\in I$ 是关于 η 的不变凸函数,g_j,$j\in J$ 是关于相同 η 的严格不变凸函数,则 $f(x)\nleqq f(y)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e$。

证明　用反证法。假设 $f(x)\leqq f(y)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e$。因为 x 和 (y,λ,μ) 分别是(NSIMP)和(MSID)的可行解,则有

$$g_j(x)\leqslant 0,j\in J \tag{13}$$

$$\lambda\in\mathbf{R}^k_+,\lambda\geqslant 0,\sum_{i\in I}\lambda_i=1,e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^k \tag{14}$$

$$0\in\sum_{i\in I}\lambda_i\partial^c f_i(y)+\sum_{j\in J}\mu_j\partial^c g_j(y) \tag{15}$$

由假设及(14)式可得

$$\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)\leqslant\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y) \tag{16}$$

(15)式即为存在 $\xi_i\in\partial^c f(y)$,$i\in I$ 和 $\zeta_j\in\partial^c g_j(y)$,$j\in J$ 使得

$$0=\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i+\sum_{j\in J}\mu_j\zeta_j \tag{17}$$

利用 f_i,$i\in I$ 的不变凸性和 g_j,$j\in J$ 的严格不变凸性及 $\lambda_i\geqslant 0$,$\mu_j\geqslant 0$,有

$$\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(y)\geqslant\sum_{i\in I}\lambda_i\langle\xi_i,\eta(x,y)\rangle \tag{18}$$

$$\sum_{j\in J}\mu_j g_j(x)-\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)>\sum_{i\in I}\mu_j\langle\zeta_j,\eta(x,y)\rangle \tag{19}$$

(18)、(19)式相加,再利用(17)式可得

$$\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j\in J}\mu_j g_j(x)-\sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)>0$$

再结合(13)式,可得

$$\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x) > \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(y) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)$$

与(16)式矛盾。则 $f(x) \not\leq f(y) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e$。 证毕

定理5 (弱对偶)设 x 和 (y,λ,μ) 分别是(NSIMP)和(MSID)的可行解。如果 $f_i,i\in I$ 和 $g_j,j\in J$ 是关于同一个 η 的不变凸函数,则 $f(x) \not< f(y) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e$。

证明过程类似于定理4,故略。

定理6 (强对偶)设 $\bar{x}$ 是(NSIMP)的有效解。假设 $f_i,i\in I$ 是关于 η 的不变凸函数,$g_j,j\in J$ 是关于相同 η 的严格不变凸函数,则存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^k,\bar{\lambda}\geqslant 0,\sum_{i\in I}\lambda_i = 1,e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^k,\bar{\mu}_j\geqslant 0,j\in J$,$J(\bar{x})$ 为有限指标集使得 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 是(MSID)的有效解,且(NSIMP)和(MSID)的目标函数在这点处相等。

证明 利用 Karush-Kuhn-Tucker 条件,则存在 $\bar{\lambda}=(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\cdots,\bar{\lambda}_k)\geqslant 0,\bar{\mu}_j\geqslant 0,\forall j\in J$ 且 $J(\bar{x})$ 为有限指标集,使得

$$0\in\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\partial^c f_i(\bar{x}) + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\partial^c g_j(\bar{x}) \tag{20}$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0,\forall j\in J \tag{21}$$

由 $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1,e=(1,1,\cdots,1)\in\mathbf{R}^k$,则 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 是(MSID)的可行解和 $f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})e$,再利用(21)式得 $f(\bar{x}) + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})e \not\leq f(y) + \sum_{j\in J}\mu_j g_j(y)e$。所以 $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 是(MSID)的有效解。 证毕

定理7 (逆对偶)设 $(\bar{y},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 是(MSID)的有效解且 $\bar{y}\in D$,假设 $f_i,i\in I$ 是关于 η 的不变凸函数,g_j,$j\in J$ 是关于相同 η 的严格不变凸函数,则 $\bar{y}$ 是(NSIMP)的有效解。

证明 假设 $\bar{y}$ 不是(NSIMP)的有效解,则存在 $\bar{x}\in D$ 使得 $f(\bar{x})\leqslant f(\bar{y})$,则

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) \leqslant \sum_{j\in J}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{y}) \tag{22}$$

因为 $(\bar{y},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ 为(MSID)的有效解和 $\bar{y}\in D$,则有

$$0\in\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\partial^c f_i(\bar{y}) + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\partial^c g_j(\bar{y}) \tag{23}$$

$$\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{y}) \geqslant 0 \tag{24}$$

$$g_j(\bar{y}) \leqslant 0,j\in J \tag{25}$$

由 $\bar{\mu}_j\geqslant 0,j\in J$ 及(24)、(25)式可得

$$\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{y}) = 0 \tag{26}$$

(23)式即为存在 $\hat{\xi}_i\in\partial^c f(\bar{y}),i\in I$ 和 $\hat{\zeta}_j\in\partial^c g_j(\bar{y}),j\in J$ 使得

$$0 = \sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\hat{\xi}_i + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\hat{\zeta}_j \tag{27}$$

利用 $f_i,i\in I$ 的不变凸性和 $g_j,j\in J$ 的严格不变凸性及 $\bar{\lambda}_i\geqslant 0,i\in I,\bar{\mu}_j\geqslant 0,j\in J$,有

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{y}) \geqslant \sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\langle\hat{\xi}_i,\eta(\bar{x},\bar{y})\rangle \tag{28}$$

$$\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{y}) > \sum_{i\in I}\bar{\mu}_j\langle\hat{\zeta}_j,\eta(\bar{x},\bar{y})\rangle \tag{29}$$

(28)、(29)式相加,再利用(27)式可得

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i f_i(\bar{x}) - \sum_{i\in I}\bar{\lambda} f_i(\bar{y}) + \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) - \sum_{j\in J}\bar{\mu}_j g_j(\bar{y}) > 0 \tag{30}$$

因为 $\bar{x}\in D$,有 $g_j(\bar{x})\leqslant 0$,所以再结合(26)、(30)式可得 $\sum_{i\in I}\bar{\lambda} f_i(\bar{x}) > \sum_{i\in I}\bar{\lambda} f_i(\bar{y})$,这与(22)式矛盾,所以 $\bar{y}$ 是(NSIMP)的有效解。 证毕

参考文献:

[1] Karney D F. A duality theorem for semi-infinite convex pro-

grams and their finite subprograms [J]. Math Program, 1983, 27: 75-82.

[2] Zhang Q X. Optimality conditions and duality for arcwise semi-infinite programming with parametric inequality constraints [J]. J Math Appl, 1995, 196: 998-1007.

[3] Goberna M A, Lopez M A. On duliy in semi-infinite programming and existence theorems for linear inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1999, 230: 173-192.

[4] Shapiro A. On duality theory of convex semi-infinite programming [J]. Optimization, 2005, 54: 535-543.

[5] Jeyakumar V. A note on stong duality in convex semidefinite optimization: necessary and sufficient conditions [J]. Optim Lett, 2008 (2): 15-25.

[6] Zhang Q H. Uniform LP duality for semidefinite and semi-infinite programming [J]. Cent Eur J Oper Res, 2008, 16: 205-213.

[7] Kanzi N, Nobakhtian S. Nonsmooth semi-infinite programming problems with mixed constraints [J]. J Math Anal Appl, 2009, 351: 170-181.

[8] Shapiro A. Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality condition [J]. Optimization, 2009, 58: 133-161.

[9] Kanzi N, Nobakhtian S. Optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming [J]. Optimization, 2010, 59: 717-727.

[10] Mishra S K, Jaiswal M, Le Thi H A. Duality for nonsmooth semi-infinite programming problems [J]. Optim Lett, 2012 (6), 261-271.

[11] Kanzi N. Necessary optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming problems [J]. J Glob Optim, 2011, 49: 713-725.

[12] Mishra S K, Jaiswal M, Le Thi H A. Nonsmooth semi-infinite programming problem using Limiting subdifferentials [J/OL]. J Glob Optim. (2011-02-18) [2011-07-30]. http://www.springerrlink.com/content/k030506723w642p5/abstract/.

[13] 邱根胜. 广义凸多目标规划的 Wolfe 型对偶定理[J]. 江西师范大学学报:自然科学版, 1999, 23 (2): 128-132.

[14] Weir T, Mond B. Pre-invex functions in multiple objective optimization [J]. J Math Anal Appl, 1988, 136: 29-38.

[15] Clarke F H. Optimization andNonsmooth Analysis [M]. New York: Wiely, 1983.

[16] Dutta J, Vetrivel V, Nanda S. Semi-invex functions and their subdifferentials [J]. Bull Austral Math Soc, 1997, 56: 385-393.

[17] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. Theory of Multiobjective Optimization [M]. New York: Academic Press, 1985.

Operations Research and Cybernetics

Optimality Condition and Duality for Nonsmooth Multiobjective Semi-infinite Programming Problems

WAN Xuan, ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we investigated the optimality condition and mixed duality for nonsmooth semi-infinite multiobjective program (NSIMP). Firstly, we proved Karush-Kuhn-Tucker necessary on the basis of the Fritz-John necessary condition, i. e., let $\bar{x}$ be an efficient solution of the problem (NSIMP) and $g_j, j \in (\bar{x})$ are strictly invex with respect to η. Then there exist $\bar{\lambda} \geqq 0, \mu_j \geqslant 0, \forall j \in J$, and for finitely many $j \in J$ such that (4)(6) hold. Furthermore, we proved Karush-Kuhn-Tucker sufficient conditions, i. e., let $\bar{x}$ be feasible in (NSIMP), Karush-Kuhn-Tucker conditions (4)(6) are satisfied at $\bar{x}$, $f_i, i \in I$ are invex with respect to η, $g_j, j \in J(\bar{x})$ are strictly invex with respect to the same η. Then $\bar{x}$ is an efficient solution of the problem (NSIMP). Finally, weak dual theorem, strong dual theorem and converse dual theorem for nonsmooth semi-infinite program involving invexity are established. Our results improve and generalize some known results.

Key words: nonsmooth semi-infinite multiobjective program; optimality condition; mixed duality

(责任编辑 黄 颖)

2012 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2012
第 29 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 29 No. 2

运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N. 20120314. 1927. 003

半- r- 预不变凸规划的混合对偶问题*

张 芳, 万 轩, 杜学武
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047)

摘要:半 r- 预不变凸函数是一类新的广义凸函数,它是 r- 预不变凸函数和半预不变凸函数的推广。本文对半 r- 预不变凸多目标规划问题的混合型对偶进行了研究。首先,给出了在可微的半 r- 预不变凸函数的一个性质;然后,利用半 r- 预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的混合型对偶,证明了目标函数和约束函数在半 r- 预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理;结论具有一般性,推广了涉及预不变凸函数、r-预不变凸函数和半预不变凸函数的文献的结论。

关键词:半连通集;半- r- 预不变凸函数;多目标规划;混合型对偶
中图分类号:O221.2 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)02-0012-04

凸性和广义凸性在数学经济、工程、管理科学和优化理论中扮演着重要的角色,有关凸性和广义凸性的研究是数学规划中最重要的方向之一。Yang 和 Chen 为研究一类变分不等式,提出半预不变凸函数的概念,这类函数可以看作是对不变凸性函数的推广[1];Tadeusz 给出了 p-不变凸集的定义,并在此基础上给出了 (p,r)- 预不变凸函数的定义[2];江维琼讨论了半预不变凸多目标规划问题有效解的充要条件,得到了半预不变凸多目标规划问题 Wolfe 型对偶模型的弱对偶和强对偶定理[3];赵克全等给出了 r- 预不变凸函数的一个性质[4];焦合华给出了一类广义凸函数——半 (p,r)- 预不变凸函数的概念,讨论了它们的一些性质,并研究了半 (p,r)- 预不变凸规划的最优性条件[5-7];赵克全等利用函数的 B-预不变凸性,给出了多目标规划的一些对偶性结果,分别建立了 Mond-Weir 型对偶模型和 Wolfe 型对偶模型的强对偶和弱对偶性结果[8];彭再云等利用 B-(p,r)-预不变凸函数建立了目标函数和约束函数均可微的多目标规划问题的 Wolfe 型对偶,证明了目标函数和约束函数在 B-(p,r)-预不变凸函数条件下的弱对偶,强对偶和严格逆对偶定理[9]。

本文将在可微半-r-预不变凸性下,讨论一类多目标规划问题的混合对偶问题。

1 预备知识

本文作以下规定,设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$。$x=y$ 是指 $x_i=y_i$ ($i=1,2,\cdots,n$);$x<y$ 是指 $x_i<y_i$ ($i=1,2,\cdots,n$);$x\leqq y$ 是指 $x_i\leqslant y_i$ ($i=1,2,\cdots,n$);$x\leqslant y$ 是指 $x\leqq y$,而 $x\neq y$。$\mathbf R_+$ 表示全体非负实数集。若无特别说明,假定非空开集 $X\subseteq\mathbf R^n$,$f:X\to\mathbf R^k$,$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm T}$,其中 $f_i:X\to\mathbf R$,$i=1,2,\cdots,k$,还规定 $\mathrm e^{(z_1,z_2,\cdots,z_k)^{\mathrm T}}=(\mathrm e^{z_1},\mathrm e^{z_2},\cdots,\mathrm e^{z_k})^{\mathrm T}$,其中 $z_i\in\mathbf R$,$i=1,2,\cdots,k$,$\eta:X\times X\times(0,1)\to\mathbf R^n$,$h:X\to\mathbf R^l$,$h(x)=(h_1(x),h_2(x),\cdots,h_l(x))^{\mathrm T}$,其中 $h_j(x)\in\mathbf R$,$j=1,2,\cdots,l$,$\varepsilon=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}\in\mathbf R^k$。

定义 1[1] 称 X 为半连通集,若对 $\forall x,y\in X$,都存在函数 η 满足 $\forall\alpha\in[0,1]$,有 $y+\alpha\eta(x,y,\alpha)\in X$。

定义 2[5] 设 X 为半连通集,称 h 是 X 上关于 η 的半- r- 预不变凸函数,如果 $\forall x,y\in X$,$\forall\alpha\in(0,1)$,有

* 收稿日期:2011-10-13 网络出版时间:2012-03-14 19:27:00
资助项目:国家自然科学基金(No. 10971241;No. 11171363);重庆师范大学自然科学基金(No. 08XLR022)
作者简介:张芳,女,硕士研究生,研究方向为最优化理论应用;通讯作者:杜学武,E-mail:duxuewu@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120314.1927.201202.12_003.html

$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha)) \leqq \log(\alpha e^{rh(x)}+(1-\alpha)e^{rh(y)})^{\frac{1}{r}}, r\neq 0$$
$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha)) \leqq \alpha h(x)+(1-\alpha)h(y), r=0$$

其中 $\log(\alpha e^{rh(x)}+(1-\alpha)e^{rh(y)})^{\frac{1}{r}}$ 为 l 维实值向量函数,它的第 i 个分量函数为

$$\log(\alpha e^{rh_i(x)}+(1-\alpha)e^{rh_i(y)})^{\frac{1}{r}}, i=1,2,\cdots,l$$

若上面不等式当 $x\neq y$ 时为严格不等式,则称 h 是 X 上关于 η 的严格半-r-预不变凸函数。

定义 3[10]　考虑问题(P)′

$$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm{T}}, x\in Y$$

其中 Y 是(P)′的可行域。设 x^* 是问题(P)′的一个可行解,即 $x^*\in Y$。若不存在(P)′的可行解 x,使 $f(x)<f(x^*)$ 成立,则称 x^* 为该问题的弱有效解。若问题(P)′中的 min 改为 max,则 $f(x)<f(x^*)$ 应改为 $f(x)>f(x^*)$

本文考虑多目标规划问题

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_k(x))^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t.}\quad g_j(x)\leqq 0, j=1,2,\cdots,m\\ \qquad x\in X\end{cases}$$

其中 $f_i: X\to\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,k$ 和 $g_j: X\to\mathbf{R}, j=1,2,\cdots,m$ 都是 X 上的可微函数。记(P)的可行域为

$$D=\{x\in X: g_j(x)\leqq 0, j=1,2,\cdots,m\}, g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))^{\mathrm{T}}$$

问题(P)的混合型对偶模型为

$$(\mathrm{MD})\begin{cases}\max f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)\varepsilon\\ \text{s.t.}\ \lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0\\ \qquad \mu^{\mathrm{T}}g(y)\geqq 0, y\in X\\ \qquad \lambda\in\mathbf{R}_+^k, \lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1, \mu\in\mathbf{R}_+^m\end{cases}$$

记问题(MD)的可行域为

$$W=\{(\lambda,\mu,y)\in\mathbf{R}_+^k\times\mathbf{R}_+^m\times X: \lambda^{\mathrm{T}}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm{T}}\nabla g(y)=0, \mu^{\mathrm{T}}g(y)\geqq 0, \lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1, \lambda\in\mathbf{R}_+^k, \lambda^{\mathrm{T}}\varepsilon=1, \mu\in\mathbf{R}_+^m\}$$

2 主要结论及其证明

引理 1　设 $\eta: X\times X\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 为连续可微函数。若 $h: X\to\mathbf{R}^l$ 是 X 上的一个关于 η 的半-r-预不变凸可微函数,则

$$\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq\frac{1}{r}(e^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon), r\neq 0$$
$$\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq h(x)-h(y), r=0$$

证明　当 $r\neq 0$ 时,由 h 在 X 上是关于 η 的半-r-预不变凸函数,则

$$h(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))\leqq\log(\alpha e^{rh(x)}+(1-\alpha)e^{rh(y)})^{\frac{1}{r}}$$

于是,当 $r>0$ 时,有
$$\frac{e^{rh(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))}-e^{rh(y)}}{\alpha}\leqq e^{rh(x)}-e^{rh(y)}$$

因为 h 是可微函数,则 $F(x)=e^{rh(x)}$ 也是可微函数,上式可化为

$$\frac{F(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))-F(y)}{\alpha}\leqq F(x)-F(y)$$

令 $\alpha\to 0^+$,则由于　$F(y+\alpha\eta(x,y,\alpha))=F(y)+\alpha\nabla F(y)\eta(x,y,0)+o(\alpha)$

故有 $\nabla F(y)\eta(x,y,0)\leqq F(x)-F(y)$,又

$$\nabla F(y)=r\cdot\begin{pmatrix}e^{rh_1(y)} & & & \\ & e^{rh_2(y)} & & \\ & & \cdots & \\ & & & e^{rh_l(y)}\end{pmatrix}\cdot\nabla h(y)$$

则有 $r\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq \mathrm{e}^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon$,即 $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq \frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon)$。

当 $r<0$ 时,同理可得 $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq \frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(h(x)-h(y))}-\varepsilon)$。

当 $r=0$ 时,类似可得 $\nabla h(y)\eta(x,y,0)\leqq h(x)-h(y)$。 证毕

定理1 (弱对偶)假设 x 和 (λ,μ,y) 分别是问题(P)和(MD)的可行解,$x\neq y$,$\lambda^{\mathrm T}f+\mu^{\mathrm T}g$ 是 X 上关于 η 的连续半-r-预不变可微凸函数,则 $f(x)\nless f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$。

证明 用反证法。假设 $f(x)<f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$,由 $\lambda^{\mathrm T}\varepsilon=1$,有 $\lambda^{\mathrm T}f(x)<\lambda^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)$,因为 x 是问题(P)的可行解,则有

$$\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)<\lambda^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y) \tag{1}$$

于是,由半-r-预不变凸函数定义及引理1可知,对问题(P)的可行解 $x(x\neq y)$,当 $r\neq 0$ 时,有

$$\eta(x,y,0)^{\mathrm T}[\lambda^{\mathrm T}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm T}\nabla g(y)]\leqq\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)-\lambda^{\mathrm T}f(y)-\mu^{\mathrm T}g(y))}-\varepsilon)$$

又因为 (λ,u,y) 是问题(MD)的可行解,有 $\lambda^{\mathrm T}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm T}\nabla g(y)=0$,故

$$\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)-\lambda^{\mathrm T}f(y)-\mu^{\mathrm T}g(y))}-\varepsilon)\geqq 0$$

则 $\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)\geqq\lambda^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)$,与(1)式矛盾,故此时 $f(x)\nless f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$。

当 $r=0$ 时,有

$$\eta(x,y,0)^{\mathrm T}[\lambda^{\mathrm T}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm T}\nabla g(y)]\leqq\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)-\lambda^{\mathrm T}f(y)-\mu^{\mathrm T}g(y)$$

又因为 $\lambda^{\mathrm T}\nabla f(y)+\mu^{\mathrm T}\nabla g(y)=0$,故

$$\lambda^{\mathrm T}f(x)+\mu^{\mathrm T}g(x)\geqq\lambda^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)$$

与(1)式矛盾,故此时 $f(x)\nless f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$。 证毕

引理2[10] 假设 x^* 是问题(P)的弱有效解,则存在 $\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\lambda^{*\mathrm T}\varepsilon=1$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使得下列结论成立:1) $\lambda^{*\mathrm T}\nabla f(x^*)+\mu^{*\mathrm T}\nabla g(x^*)=0$;2) $\mu^{*\mathrm T}g(x^*)=0$。

定理2 (强对偶)假设 x^* 是问题(P)的弱有效解,且对 $\forall\lambda\in\mathbf{R}_+^k$,$\forall\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$\lambda^{\mathrm T}f+\mu^{\mathrm T}g$ 均为 X 上关于 η 的半-r-预不变连续可微凸函数,则存在 $\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使 (λ^*,μ^*,x^*) 是问题(MD)的弱有效解。

证明 因为 x^* 是问题(P)的弱有效解,可知存在 $\lambda^*\in\mathbf{R}_+^k$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,使得引理2的结论成立,从而可知 (λ^*,μ^*,x^*) 是问题(MD)的可行解。又由定理1可知,对于问题(MD)的可行解 (λ,μ,y),$y\neq x^*$,有 $f(x^*)\nless f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$,再结合引理2的结论2),有 $f(x^*)+\mu^{*\mathrm T}g(x^*)\varepsilon\nless f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)\varepsilon$,所以由定义3可知,$(\lambda^*,\mu^*,x^*)$ 是问题(MD)的弱有效解。 证毕

定理3 (逆对偶)假设 (λ^*,μ^*,y^*) 是问题(MD)的弱有效解且 $y^*\in D$,对于 $\forall\lambda\in\mathbf{R}_+^k$,$\forall\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$\lambda^{\mathrm T}f+\mu^{\mathrm T}g$ 均为 X 上关于 η 的半-r-预不变连续可微凸函数,则 y^* 是问题(P)的弱有效解。

证明 用反证法。假设 y^* 不是问题(P)的弱有效解,则存在 $x^*\in D$,$x^*\neq y^*$,使得 $f(x^*)<f(y^*)$。于是 $\lambda^{*\mathrm T}f(x^*)<\lambda^{*\mathrm T}f(y^*)$。又因为 (λ^*,μ^*,y^*) 是问题(MD)的弱有效解且 $y^*\in D$ 及 $x^*\in D$,所以,$\mu^{*\mathrm T}f(x^*)\geqq 0$,$g_j(y^*)\leqq 0$,$g_j(x^*)\leqq 0$,$j=1,2,\cdots,m$,$\mu^*\in\mathbf{R}_+^m$,于是有 $\mu^{*\mathrm T}g(y^*)=0$,$\mu^{*\mathrm T}g(x^*)\leqq 0$,从而

$$\lambda^{*\mathrm T}f(x^*)+\mu^{*\mathrm T}g(x^*)<\lambda^{*\mathrm T}f(y^*)+\mu^{*\mathrm T}g(y^*) \tag{2}$$

于是由半-r-预不变凸函数定义及引理1可知,对于问题(P)的可行解 $x^*(x^*\neq y^*)$,有

$$[\lambda^{*\mathrm T}\nabla f(y^*)+\mu^{*\mathrm T}\nabla g(y^*)]\eta(x^*,y^*,0)\leqq\frac{1}{r}(\mathrm{e}^{r(\lambda^{*\mathrm T}f(x^*)+\mu^{*\mathrm T}g(x^*)-\lambda^{*\mathrm T}f(y^*)-\mu^{*\mathrm T}g(y^*))}-\varepsilon)$$

又因为 (λ^*,u^*,y^*) 是问题(MD)的可行解,有 $\lambda^{*\mathrm T}\nabla f(y^*)+\mu^{*\mathrm T}\nabla g(y^*)=0$,所以

$$\frac{1}{r}\left(e^{r(\lambda^{*T}f(x^*)+\mu^{*T}g(x^*)-\lambda^{*T}f(y^*)-\mu^{*T}g(y^*))}-\varepsilon\right)\geqq 0$$

则 $\lambda^{*T}f(x^*)+\mu^{*T}g(x^*)\geqq\lambda^{*T}f(y^*)+\mu^{*T}g(y^*)$，与(2)式矛盾，所以 y^* 是问题(P)的弱有效解。

证毕

参考文献：

[1] Yang X Q, Chen G Y. A Class of nonconvex functions and prevariational inequalities[J]. Jorunal of Mathematical Analysis and Applications, 1992, 169(2): 359-373.

[2] Tadeusz A. (p, r)-Invex sets and functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 263(2): 355-379.

[3] 江维琼. 半预不变凸多目标规划的最优性条件及 Wolfe 型对偶定理[J]. 华东师范大学学报:自然科学版, 2006, 3: 32-36.

[4] Zhao K Q, Long P J, WAN X. A characterization for r-preinvex function[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(2): 1-5.

[5] 焦合华. 半(p, r)-预不变凸函数及其规划的最优性条件[J]. 云南民族大学学报:自然科学版, 2007, 165-99.

[6] 焦合华. 半(p, r)-不变凸多目标分式规划的 Wolfe 型对偶[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2011, 34(5): 659-662.

[7] 焦合华. B-(p, r)-不变凸规划的最优性条件及 Wolfe 型对偶[J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2008, 31(1): 88-92.

[8] 赵克全, 陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2008, 25: 1-3.

[9] 彭再云, 万轩. B-(p, r)-预不变凸规划的 Wolfe 对偶问题与极小化问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2010, 27: 1-6.

[10] 林锉云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春: 吉林教育出版社, 1992.

Operations Research and Cybernetics

Mixed Duality for Programming with Semi-*r*-preinvexity Functions

ZHANG Fang, WAN Xuan, DU Xue-wu

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, we introduced a new class of generalized convex function, called semi-*r*-preinvex function, which generalized *r*-preinvex function and semi-preinvex function. We investigated mixed type duality involving semi-*r*-preinvex function. Firstly, a characterization about differentiable semi-*r*-preinvex function is presented; secondly, we established dual model of a class of multiobjective programming involving differentiable constraint and objective function and proved the corresponded weak duality, strong duality and strictly inverse duality, which generalized the corresponded result of preinvex function, *r*-preinvex function and semi-preinvex function.

Key words: semi-connected sets; semi-*r*-preinvex functions; multiobjective programming; mixed type duality

(责任编辑 黄 颖)