运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N. 20120915. 2319. 003

极小化加权总完工时间的工件可拒绝排序*

张树霞[1]，张　峰[2]

(1. 镇江船艇学院，船艇指挥系，江苏 镇江 212003；2. 上海第二工业大学 理学院，上海 201209)

摘要:经典的排序问题要求工件都必须进行加工,然而在实际中有时候由于一些特殊的原因可以考虑工件不加工。例如,加工时间非常大,或加工所需费用非常高,于是就不加工这一工件,而是通过支付一定的费用后送到外边"外加工"或购买更合算,这类问题称为工件可拒绝排序问题。需要研究的任务是怎样选择工件在机器上进行加工或拒绝,并且如何安排被接受加工工件的加工次序使给定的目标函数值最优。本文研究了工件可拒绝排序中,目标函数是有限的总惩罚费用(总惩罚费用约束下)极小化加权总完工时间,工件到达时间都相同的同型机问题,设计了伪多项式时间的动态规划算法,并给出了相应的 FPTAS 算法。

关键词:可拒绝排序；动态规划；FPTAS

中图分类号:O221.7　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2012)05-0010-03

经典的排序问题要求工件都必须进行加工,然而在实际中有时候由于一些特殊的原因可以考虑工件不加工,例如:加工时间非常大,或加工所需费用非常高,于是就不加工这一工件,而是通过支付一定的费用后送到外边"外加工"或购买更合算。把这类问题称为工件可拒绝排序问题。用三参数表示为 $\alpha|rej|\gamma$,其中 α 代表的是机器环境,rej 代表工件可以被拒绝加工,γ 代表需要研究的目标函数。

Y. Bartal 等[1]在 2000 年最早提出了工件可拒绝的概念,此后由于工件可拒绝排序问题的复杂性与应用性,引起了广大排序理论学者的极大关注。工件可拒绝排序问题可具体描述为:有 n 个工件需要加工,每个工件有加工时间(Processing time)p_j,拒绝费用(Rejection penalty)e_j,到达时间(Release time)r_j和工期(Due date)d_j(有时候可能或 $r_j\equiv 0$ 或/和 $d_j\equiv\infty$),要研究的任务是怎样选择工件在机器上进行加工或拒绝,并且如何安排被接受加工工件的加工次序使给定的目标函数值最优。

本文研究的目标函数一般都是一个正则函数(Regular objective function),即目标函数为每个工件完工时间的非减函数与拒绝工件的拒绝费用(用 TCP 表示)之和。

本文主要研究了离线情形下 m 台同型机,目标函数是有限的总惩罚费用(总惩罚费用约束下)极小化加权总完工时间的工件可拒绝排序问题。用 $\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$表示已给定的工件,用 SR 表示可拒绝排序。在 SR 模型中,每个工件 $J_j(1\leqslant j\leqslant n)$由两个参数$(p_j,e_j)$来刻画,其中如果工件被接受 p_j 是其加工时间,如果工件被拒绝 e_j 是其拒绝费用。

工件可拒绝排序实质上是双目标排序问题,这样有下面的 4 种模式可以研究。

(P1) 极小化目标函数 F_1+F_2；

(P2) 在 $F_2\leqslant a$ 的约束下极小化 F_1,其中 a 是给定的一个输入；

(P3) 在 $F_1\leqslant b$ 的约束下极小化 F_2,其中 b 是给定的一个输入；

(P4) 求解所有的 Pareto 最优解。

其中 F_1 是原来的目标函数,F_2 是总的拒绝费用。在 Graham 等[2]提出的三参数表示法中,以上 4 个模型在目标函数域中分别写成,F_1+F_2,F_1/F_2,F_2/F_1 和(F_1,F_2)。

1 研究概况

离线情形下,曹志刚和张玉忠[3]在 2007 年证明了问题 $1|rej,r_j|C_{\max}+TCP$ 即使只有两个到达时

* **收稿日期**:2012-05-18　　**网络出版时间**:2012-9-15　23:19

资助项目:国家自然科学基金(No. 70731160015)

作者简介:张树霞,女,副教授,博士,研究方向为组合最优化。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120915.2319.201205.10_003.html

间，问题也是 NP-难的，并给出了该问题的 PTAS 算法。张利齐等[4]在 2009 年也对上述问题在只有两个到达时间下的 NP-难性给出了证明，同时给出了问题的一个 2-近似算法和 FPTAS 算法。Y. Bartal 等[1]对于工件不可中断目标函数是极小化最大完工时间加总拒绝费用的排序问题：$P_m|rej|C_{\max}+TCP$，给出了算法 APPROX，分析算法 APPROX 时间复杂性为 $O(\log(n))$，性能比为 $(2-1)/m$，最后对于固定的 m 设计了 FPTAS 算法，对于任意的 m 给出了一个多项式时间的近似算法。张玉忠等[5]在 2009 年对拒绝费用有限制的多个问题分别进行了研究，证明了问题 $1|rej|C_{\max}/TCP$ 和 $1|rej,r_j|C_{\max}/TCP$ 都是 NP-难的。对于问题 $1|rej,r_j|C_{\max}/TCP$，设计了伪多项式时间算法和 FPTAS 算法。对于问题 $p_m|rej|C_{\max}/TCP$ 设计了基于动态规划的伪多项式时间算法，对 m 为固定的数时设计了 FPTAS 算法。对于问题 $1|rej,r_j|\sum w_jC_j+TCP$，D. W. Engels 等[6]在 2003 年证明其为 NP-难的，并基于动态规划给出了一个伪多项式时间算法和 FPTAS 算法。对目标函数为最大延迟和最大延误的单机工件可拒绝排序问题，S. Sengupta 等[7]在 2003 年进行了研究，相应结论如下：对问题 $1||L_{\max}(s)+TCP$ 和问题 $1||T_{\max}(s)+TCP$ 的 NP-难性给出了证明，并分别设计了伪多项式时间算法，最后对最大延迟问题设计了 PTAS 算法。另外，考虑了 $1||L_{\max}(s)+\prod e_j$，并设计了 FPTAS 算法。对于问题

$$1|rej|\sum w_jc_j/TCP$$

曹志刚和张玉忠[8]在 2006 年证明了它的 NP-困难性，并设计了 FPTAS 算法。

本文研究工件可拒绝排序中，目标函数是有限的总惩罚费用（总惩罚费用约束）下极小化加权总完工时间的同型机问题 $P_m|rej|\sum w_jc_j/TCP$，设计了伪多项式时间的动态规划算法，并给出了相应的 FPTAS 算法。

2 动态规划和 FPTAS 算法

任意给定一个工件集 $\{J_j=(p_j,w_j,e_j):1\leqslant j\leqslant n\}$，$m$ 台同型机 $\{M_1,M_2,\cdots,M_n\}$，其中 m 是常数，给定总惩罚费用 TCP 的一个界 E，每个工件只能由一台机器加工，下面将用动态规划方法找一个使得加权总完工时间为最小的排序，而且其总惩罚费用 TCP 不超过 E。

引理 1[8]　问题 $1|rej|\sum w_jC_j/TCP$ 是 NP-难的。

既然问题 $1|rej|\sum w_jC_j/TCP$ 是问题

$$P_m|rej|\sum w_jC_j/TCP$$

的特例，而问题 $1|rej|\sum w_jC_j/TCP$ 是 NP-难的，可见问题 $P_m|rej|\sum w_jC_j/TCP$ 是 NP-难的。

假设所有的工件已按 p_j/w_j 非减的顺序排列。对于 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 的一个排序，记机器 $M_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 上总加工时间为 P^i，加权总完工时间为 A^i。令 $P=(P^1,P^2,\cdots,P^m)^{\mathrm{T}}$，$A=(A^1,A^2,\cdots,A^m)^{\mathrm{T}}$，显然 P、A 都是 m 维向量，则称其状态为 (j,P,A)。

用 $f(j,P,A)$ 表示工件 $J_1,J_2,\cdots,J_j$ 在机器 M_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 上总加工时间为 P^i，$0\leqslant P^i\leqslant\sum_{j=1}^n p_j$，且加权总完工时间为 A^i 的排序中 TCP 的最小值。

若记 E_v 是第 v 个分量为 1 的 m 维单位向量。有递推关系

$$f(1,P,A)=\begin{cases}0,\text{若 } PE_v=p_1,\ AE_v=w_1p_1\\ e_1,\text{若 } PE_v=0\ ,\ AE_v=0\\ +\infty,\text{其它}\end{cases}$$

$$f(j,P,A)=$$
$$\min\{f(j-1,P-p_jE_v,A-w_jE_v),f(j-1,P,A)+e_j\}$$

找最小的加权总完工时间和相应的 A，使其满足 $f(n,P,A)\leqslant E$ 对某个 P，$0\leqslant P^i\leqslant\sum_{j=1}^n p_j$ 成立，则相应的 $f(n,P,A)$ 就是最优目标值。然后用倒推法可以得到相应的最优排序。

很容易计算此动态规划的时间复杂性为

$$O(n\,(nP_{\max})^m\,(n^2P_{\max}w_{\max})^m)$$

这是输入的一个伪多项式。

为了在多项式时间内得到一个 $(1+\varepsilon)$-近似解，可以用 $P_m|dm|C_{\max}/TCP$[9]中类似的方法。即利用状态空间修剪（Trimming the state-space）技巧将每个状态空间进行修剪，以使得新的状态空间的基数是输入的多项式，而修剪所付出的精度方面的代价足够小。唯一的不同是，对于每个状态向量 (j,P,A)，需要使用两次拉伸技术（Stretching technique）：如果 $P^i(1\leqslant i\leqslant m)$ 不是 $1+\varepsilon_0$ 的整数次方，其中 $\varepsilon_0=\varepsilon/(4n)$，则首先将 p_j 拉伸一点使得 P^i 是这种形式，然后将 w_j 拉伸一点使得 $A^i(1\leqslant i\leqslant m)$ 也是 $1+\varepsilon_0$ 的整数次方。对于已经是这种形式的 P^i（在这个状态工件 J_j 可能被拒绝），只需拉伸 w_j。经过这两步操作以后，A^i 最多变为原来的 $(1+\varepsilon_0)^2$ 倍。

不难计算，相应的运行时间是

$$O(n((1/\varepsilon)n\log(nP_{\max}))^m\,((1/\varepsilon)n\log(n^2P_{\max}w_{\max}))^m)$$

这是一个输入规模的多项式。

定理 2 问题 $P_m|rej|\sum w_jC_j/TCP$ 有 FPTAS 算法。

3 结论和进一步研究方向

本文首次研究了工件可拒绝排序中,有限的总惩罚费用(总惩罚费用约束)下极小化加权总完工时间的 m 同型机问题 $P_m|rej|\sum w_jC_j/TCP$。对此类问题的同类机以及无关机情形有待进一步研究。

参考文献:

[1] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[J]. SIAM Journal of Discrete Maths, 2000, 13: 64-78.

[2] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5: 287-326.

[3] 曹志刚,张玉忠. Scheduling with rejection and non-identical job arrivals[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2007, 20: 529-535.

[4] Zhang L, Lu L, Yuan J. Single machine scheduling with release dates and rejection[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 198: 975-978.

[5] 张玉忠,任建峰,王成飞. Scheduling with rejection to minimize the makespan[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2009, 5573: 411-420.

[6] Engels D W, Karger D R, Kolliopoulos S G, et al. Techniques for scheduling with rejection[J]. Lecture Notes in Computer Science, 1998, 1461: 490-501.

[7] Sengupta S. Algorithms and approximation schemes for minimum lateness/tardiness scheduling with rejection [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2748: 79-90.

[8] Cao Z, Wang Z, Zhang Y, et al. On several scheduling problems with rejection or discretely compressible processing times[J]. Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 2006, 3959: 90-98.

[9] Zhang S X, Cao Z G, Zhang Y Z. On two scheduling problems with discretely compressible processing times [J]. OR Transactions, 2007, 11(2): 11-16.

Operations Research and Cybernetics

Scheduling with Rejection to Minimize the Total Weighted Completion Time

ZHANG Shu-xia[1], ZHANG Feng[2]

(1. Dept. of Watercraft Command, Zhenjiang Watercraft College, Zhenjiang Jiangsu 212003

2. School of Science, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209, China)

Abstract: In the classical scheduling models, it is always assumed that for any job. We have to process it, however, in the real world; we can choose not to process a job. For example, the processing time is too long or the processing penalty is expensive. So it is worthwhile for us to send it outside to be processed or purchased by paying some money, we call the problem scheduling with rejection. The task we are about to research is how we choose the job to be processed or rejected, and how we arrange for the processing orders of the jobs so as to optimize the objective function value. In this paper, we consider the scheduling with rejection to minimize the total weighted completion time with the constraint of total rejection penalties on m identical parallel machines. We show that it is NP-hard and design a pseudo-polynomial time algorithm as well as an FPTAS through dynamic programming.

Key words: rejection scheduling; dynamic programming; FPTAS

(责任编辑 黄 颖)