DOI:CNKI:50-1165/N.20120915.2319.012

拟 Banach 空间正交的右存在性和左存在性*

薛 建 明
(昆明理工大学 津桥学院, 昆明 650106)

摘要:给出了一类新的正交性—拟 Banach 空间正交性,它是正交性的一种推广。首先,建立了拟 Banach 空间中两个元素的正交性与线性泛函之间的关系,并给出拟 Banach 空间正交的充要条件,即设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间,有界线性泛函 $f\in S_{X^*}=\{f\in X^*:\|f\|=1\}$,非零元素 $x\in X$,$H=\{h\in H:f(h)=0\}$ 是 X 的超平面,则 $|f(x)|=\|x\|$ 等价于 $x\perp H$;然后,给出了拟 Banach 空间正交右存在性和左存在性的充分条件;最后,举例说明了拟 Banach 空间中任意两元素不一定有正交右存在性。

关键词:拟 Banach 空间;正交;超平面
中图分类号:O177.2　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2012)05-0050-03

1 基本定义

随着 Banach 空间正交性理论的研究与发展,许多正交性质得到了深入研究,并得到了一些很好的结果,在 20 世纪 30 年代,G. Birkhoff 在文献[1]中最早给出 Banach 空间上 B-正交性的定义,R. C. James 在文献[2]中研究了赋范空间中 B-正交性与线性泛函、超平面等概念的关系,正交性得到了很多较深入的研究[3]。受此启发,本文研究了拟 Banach 空间正交性,并以线性泛函为主要工具来研究拟 Banach 空间中两个元素的正交右存在性和左存在性,并举例说明了拟 Banach 空间中任意两元素不一定有正交右存在性。

定义 1[4-5]　设 X 是实线性空间,$\|\cdot\|$ 是 X 上的实值函数,满足

1)对任意的 $x\in X$, $\|x\|\geqslant 0$ 并且 $\|x\|=0$,当且仅当 $x=0$;

2)对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$ 及任意的 $x\in X$,有 $\|\lambda x\|=|\lambda|\ \|x\|$;

3)存在常数 $C\geqslant 1$,使对任意的 $x, y\in X$,有
$$\|x+y\|\leqslant C\|x\|+C\|y\|。$$
称 $\|\cdot\|$ 是 X 上的拟范数,称 $(X,\|\cdot\|)$ 是拟赋范线性空间,完备的拟赋范线性空间是拟 Banach 空间,当 $C=1$ 时,$(X, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间。

定义 2[6]　由实线性空间 X 上的非零线性泛函及 $r\in\mathbf{R}$ 所定义的集合
$$H_f=\{x\in X:f(x)=r\}$$
称为 X 中的超平面。

定义 3[7]　设 X,Y 是拟 Banach 空间,称线性算子 $T:X\to Y$ 是有界的,如果有常数 $M\geqslant 0$,使得 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 对所有的 $x\in X$ 成立。

定义 4[7]　设 X, Y 是拟 Banach 空间,用 $L(X, Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的有界线性算子的全体,并规定
$$\|T\|=\sup_{x\in X\setminus 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$
为 $T\in L(X, Y)$ 的拟范数,用 X^* 表示 $L(X, K)$,即 X^* 表示 X 上的线性有界泛函的全体

2 主要结果

定义 5　设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间,$x,y\in X$,若对于任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$,满足如下不等式
$$\|x+\lambda y\|\geqslant\|x\|$$
则称 x 正交于 y,记为 $x\perp y$。

右存在性:设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间,$x, y\in X$,存在 $a\in\mathbf{R}$,满足 $x\perp(ax+y)$。

左存在性:设 X 是 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间,$x, y\in X$,存在 $a\in\mathbf{R}$,满足$(ax+y)\perp x$。

在拟 Banach 空间中正交性与线性泛函、超平面的关系如下。

* **收稿日期:**2011-12-05　　**网络出版时间:**2012-9-15 23:19
作者简介:薛建明,女,硕士,研究方向为泛函分析与矩阵理论。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20120915.2319.201205.50_012.html

定理 1　设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间，有界线性泛函 $f\in S_{X^*}=\{f\in X^*:\|f\|=1\}$，非零元素 $x\in X$，$H=\{h\in H:f(h)=0\}$ 是 X 的超平面，则 $|f(x)|=\|x\|$ 的充要条件是 $x\perp H$。

证明　（必要性）若 $|f(x)|=\|x\|$，对任意的 $h\in H,\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$|f(x+\lambda h)|=|f(x)+f(\lambda h)|=$$
$$|f(x)|\leqslant\|f\|\ \|x+\lambda h\|$$

从而对任意的 $h\in H,\lambda\in\mathbf{R}$，$\|x+\lambda h\|\geqslant\|x\|$。即 $x\perp H$。

（充分性）由超平面的定义可知，此定理中的 $H=N_f$，（N_f 表示 f 的核空间）若 $x\perp H$，设 $|f(x)|=p\|x\|$，因为对任意的 $h\in H,\lambda\in\mathbf{R}$，

$$\|x+\lambda h\|\geqslant\|x\|$$

对任意的 $y\in X$，$y=\dfrac{f(y)}{f(x)}x+\left(y-\dfrac{f(y)}{f(x)}x\right)$，且 $y-\dfrac{f(y)}{f(x)}x\in H$，于是

$$|f(y)|=\left|f\left(\frac{f(y)}{f(x)}x+\left(y-\frac{f(y)}{f(x)}x\right)\right)\right|=$$
$$\left|f\left(\frac{f(y)}{f(x)}x\right)\right|=P\left\|\frac{f(y)}{f(x)}x\right\|\leqslant$$
$$P\left\|\frac{f(y)}{f(x)}x+\left(y-\frac{f(y)}{f(x)}x\right)\right\|=P\|y\|$$

因而 $1=\|f\|=P$，$|f(x)|=\|x\|$。　　证毕

推论 1　设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间，非零元素 $x,y\in X$，若存在有界线性泛函 $f\in X^*$，$|f(x)|=\|x\|$，$\|f\|=1$，$f(y)=0$，则

$$x\perp y$$

推论 2　（右存在性）设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间，非零元素 $x,y\in X$，若存在有界线性泛函 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，$|f(x)|=\|x\|$，$a=-\dfrac{f(y)}{f(x)}$，则 $x\perp(ax+y)$。

拟 Banach 空间正交左存在性与线性泛函有如下关系。

定理 2　（左存在性）设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间，非零元素 $x,y\in X$，若存在有界线性泛函 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，$f(y)=\|ax+y\|$，$f(x)=0$，则 $(ax+y)\perp x$。

证明　如果存在有界线性泛函 $f\in X^*$，$\|f\|=1$，$f(y)=\|ax+y\|$，$f(x)=0$，则对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，有

$$\|ax+y\|=f(y)=f(ax+y+\lambda x)\leqslant$$
$$\|f\|\ \|ax+y+\lambda x\|=\|ax+y+\lambda x\|$$

所以 $(ax+y)\perp x$。　　证毕

定理 3　设 X 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间，$x,y\in X$，如果存在实数 $A,B,A<B$，并且 $(Ax+y)\perp x$，$(Bx+y)\perp x$，那么对于 $A\leqslant a\leqslant B$，则必有下列命题之一成立：

1）$(ax+y)\perp x$；

2）$\|ax+y\|=\beta\|Ax+y\|=\beta\|Bx+y\|$，其中 $1<\beta\leqslant C$。

证明　因为 $(Ax+y)\perp x$，$(Bx+y)\perp x$，所以 $\|Ax+y\|=\|Bx+y\|$。若(1)式不成立，存在 $0<\lambda<1$，使得 $a=\lambda A+(1-\lambda)B$，则

$$\|Ax+y\|<\|ax+y\|=\|(\lambda A+(1-\lambda)B)x+y\|=$$
$$\|\lambda(Ax+y)+(1-\lambda)(Bx+y)\|\leqslant C\|Ax+y\|$$

令 $\beta=\dfrac{\|ax+y\|}{\|Ax+y\|}$，则

$$\|ax+y\|=\beta\|Ax+y\|=\beta\|Bx+y\|$$

其中 $1<\beta\leqslant C$。　　证毕

在实数域 $\mathbf{R}$ 上的拟 Banach 空间 X 中，并非对任意的非零元素 $x\in X$，都存在过原点的超平面 H，使得 $x\perp H$；并非对任意的非零元素 $x,y\in X$，都存在 $a\in\mathbf{R}$，使得 $x\perp(ax+y)$。下面例子将很好地说明这两个问题。

例 1　拟 Banach 空间 $l_2^{\frac{1}{2}}=\{x=(x_1,x_2):|x_1|^{\frac{1}{2}}+|x_2|^{\frac{1}{2}}<+\infty,\ x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$ 其拟范数定义为

$$\|x\|=(|x_1|^{\frac{1}{2}}+|x_2|^{\frac{1}{2}})^2,x\in l_2^{\frac{1}{2}}$$

$x=(1,1)\in l_2^{\frac{1}{2}}$，则对任意 $0\neq y\in l_2^{\frac{1}{2}}$ 均有 x 与 y 不正交。

证明　对任意的 $0\neq a\in\mathbf{R}$，令 $y=(a,0)$，取 $\lambda=-\dfrac{1}{a}$，则 $\|x+\lambda y\|=\|x-\dfrac{y}{a}\|=1<4=\|x\|$。

对任意的 $0\neq a\in\mathbf{R}$，令 $y=(0,a)$，取 $\lambda=-\dfrac{1}{a}$，

则　$\|x+\lambda y\|=\|x-\dfrac{y}{a}\|=1<4=\|x\|$。

下证对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，$a\neq b$，$y=(a,b)$，都存在 λ，使得

$$\|x+\lambda y\|<\|x\|$$

若不然，存在 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab\neq0$，$a\neq b$，$y=(a,b)$，对任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，都有 $\|x+\lambda y\|\geqslant\|x\|$。

当取 $\lambda=-\dfrac{1}{a}$ 时，有 $\left|1-\dfrac{b}{a}\right|\geqslant4$。

当取 $\lambda=-\dfrac{1}{b}$ 时，有 $\left|1-\dfrac{a}{b}\right|\geqslant4$。

容易知道同时满足上面两个不等式 a,b 是不存

在的，从而对任意 $0\neq y\in l_2^{\frac{1}{2}}$ 均有 x 与 y 不正交，进而不存在过原点的超平面与 x 正交。 证毕

例 2 在拟 Banach 空间 $l^{\frac{1}{2}}$ 中，$x=(1,1,0,\cdots)$，$y=(-1,0,0,\cdots)$，证明：x,y 的右存在性不存在。

证明 要证 x,y 的右存在性不存在，只须对任意的 $a\in\mathbf{R}$，都存在 $\lambda_0\in\mathbf{R}$，使得

$$\|x\|>\|x+\lambda_0(ax+y)\|$$

当 $a=0$ 时，取 $\lambda_0=1$，则

$$4=\|x\|>1=\|x+y\|$$

当 $|a|>\frac{1}{4}$ 时，取 $\lambda_0=-\frac{1}{a}$，则

$$\left\|x-\frac{1}{a}(ax+y)\right\|=\frac{1}{|a|}<4=\|x\|$$

当 $|a|\leqslant\frac{1}{4}$ 时，取 $\lambda_0=\frac{1}{1-a}$，则

$$\left\|x+\frac{1}{1-a}(ax+y)\right\|=\frac{1}{1-a}\leqslant\frac{4}{3}<4=\|x\|$$

综上可知 x,y 的右存在性不存在。 证毕

参考文献：

[1] Birkhoff G. Orthogonality in linear metric space[J]. Duke Math J, 1935, 1: 169-172.

[2] JAME R C. Orthogonality and linear functional in normed linear space[J]. Trans Amer Math Soc, 1947, 12: 265-292.

[3] Kaewkhao A. The James constant, the Jordan-von Neumann constant, weak orthogonality, and fixed points for multivalued mappings[J]. J Math Anal Appl, 2007, 333: 950-958.

[4] Benyamini Y, Lindenstauss J. Geometric nonlinear functional analysis[M]. Louisrille: Amer Math Soc Colloq Publ, 1999.

[5] Rolewicz S. Metric linear spaces[M]. Warszawa: PWN-Polish Sci Publ Warszawa, 1984.

[6] 定光桂. 泛函分析新讲[M]. 北京：科学出版社，2007.

[7] 徐永春. 拟 Banach 空间与 K-凸集上 Minkowski 泛函[J]. 河北大学学报：自然科学版，2004, 4: 345-349.

Right-Existence and Left-Existence of Orthogonality in Quasi-Banach Spaces

XUE Jian-ming

(Oxbridge College, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650106, China)

Abstract: A class of new generalized orthogonality of quasi-Banach spaces is given in this paper. It is a generalization of orthogonality. First, the relation of orthogonality and linear functional are introduced. At the same time, a necessary and sufficient condition of orthogonality in quasi-Banach spaces is given. Namely, let X be a quasi-Banach spaces on $\mathbf{R}$, $f\in S_{X^*}=\{f\in X^*:\|f\|=1\}$ for all $x\in X$ and $x\neq 0$, $H=\{h\in H: f(h)=0\}$, then $|f(x)|=\|x\|$ is equivalent to $x\perp H$. The sufficient conditions of right-existence and left-existence of orthogonality are discussed. Finally, two examples which show that right-existence of orthogonality in quasi-Banach spaces does not exist for all elements are given.

Key words: quasi-Banach space; orthogonality; hyperplane

(责任编辑 游中胜)