运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20121112.1642.003

带有公共交货期窗口和加工时间可控的单机排序问题*

郭 玲,赵传立
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院,沈阳 110034)

摘要:讨论了带有公共交货期窗口和工件的加工时间可控的单机排序问题。假设工件的加工时间是所分配资源的线性非增函数,且分配资源会产生费用。交货期窗口的开始时间是固定且不受限制的,交货期窗口的结束时间是不确定的决策变量(即交货期窗口的大小不确定)。如果工件在窗口中完工则不产生费用,否则工件提前或延误,则会产生相应的提前或延误的费用。目标函数是极小化总完工时间,提前时间,延误时间,交货期窗口的结束时间(即窗口的开始时间与窗口大小的和)和资源分配的总费用。给出了最优解的一些性质,并且证明了这个问题是多项式时间可解的。

关键词:排序;单机;窗口;加工时间可控;资源分配
中图分类号:O221.7 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2012)06-0009-06

近年来,关于加工时间可控与交货期窗口的单机排序问题受到越来越多的关注。加工时间可控是指工件的实际加工时间依赖于所分配的资源。Vickson[1]最早提出加工时间是资源消耗的线性函数的单机排序问题,目标函数是极小化总加权流时间与加工时间压缩的总费用。Cheng 等[2]与 Shabtay 和 Steiner[3]将工期和加工时间可控两种模型结合起来,Cheng 等[2]讨论了在两种工期分派下,工件的加工时间是线性非增函数的单机排序问题,目标函数是极小化总提前、总延误和加工时间压缩的总费用。Shabtay 和 Steiner[3]讨论了在不同工期下工件的加工时间由两种资源分配控制的单机排序问题,目标函数是在 Cheng 等[2]的基础上增加了工期和最大完工时间的费用。Chio 等[4]研究工件的加工时间和释放时间均为可控的单机排序问题,证明了减少单位释放时间产生的费用相同时,问题是多项式时间可解的,而减少单位释放时间产生的费用不同时,问题是 NP-难的。Shabtay 和 Steiner[5]对加工时间可控的单机排序和多机排序的问题做了综述。

交货期窗口问题是指,若某个工件在交货期窗口中完工,则不产生惩罚费用,但是工件若在窗口之前或之后完工则会产生提前或延误的费用。在许多交货期窗口问题中,窗口的开始时间和结束时间都是决策变量。Liman 等[6]提出带有公共交货期窗口的单机排序问题,窗口的开始时间和窗口的大小都是待确定的。目标函数是极小化总提前、总延误、窗口的开始时间、与窗口的大小的总费用。Janiak 等[7]根据交货期窗口分派的不同模型,提出了 4 个排序问题,并相应的给出最优解。Liman 等[8]和 Wan[9]则是考虑将加工时间可控与交货期窗口结合在一起的模型,前者研究的是加工时间可线性压缩,窗口的开始时间以及窗口的大小都是待确定的单机排序问题,目标函数是极小化总提前、总延误、总完工时间、窗口大小、总压缩的总费用。后者研究的是加工时间可线性压缩,窗口可任意移动,窗口大小是固定的单机排序问题,目标函数是极小化加工时间压缩、提前时间和延误时间的总费用。Mosheiov 和 Sarig[10]研究多准则下的交货期窗口分派问题,其中窗口的开始时间是固定且不受限制的,窗口的结束时间是不确定的,目标函数是极小化总完工时间、总提前和延误、与窗口的结束时间的总费用。此外,Mosheiov 和 Sarig[11],Yeung 等[12]也对涉及交货期窗口的排序问题进行了深入的探讨。

本文考虑文献[10]的排序模型,将加工时间可

* 收稿日期:2012-03-05 修回日期:2012-04-20 网络出版时间:2012-11-12 16:42:01
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471096)
作者简介:郭玲,女,硕士研究生,研究方向为排序理论;通讯作者:赵传立,E-mail:zhaochuanli@synu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20121112.1642.201206.9_003.html

控与交货期窗口问题结合构成一个新的模型,给出了一些最优解的性质,并将问题最终转化成指派问题,证明了该问题是多项式时间可解的。

1 问题描述及相关引理

本文讨论的问题可描述如下:设有 n 个工件 $\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$在一台机器上加工。全部工件零时刻到达,加工不可中断,且机器在同一时间只能加工一个工件。工件 J_j 的实际加工时间 $p_j(j=1,\cdots,n)$ 是一个依赖资源量的线性非增函数,即 $p_j=\bar{p}_j-a_ju_j,0\leqslant u_j\leqslant\bar{u}_j<\frac{\bar{p}_j}{a_j}$,其中 $\bar{p}_j$ 表示工件 J_j 的正常加工时间,u_j 表示分配给工件 J_j 的资源,$\bar{u}_j$ 表示分配给工件 J_j 的资源的上界,即 $0\leqslant u_j\leqslant\bar{u}_j$,$a_j$ 表示工件 J_j 的正压缩率。$b_j(\geqslant0)$表示单位资源的费用。T 表示排序的开始时间。d_1,d_2 分别表示窗口的开始时间和结束时间,其中 d_1 是一个固定常量,且 $d_1>P$,其中 $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{p}_i$,$d_2$ 是一个决策变量,且 $d_2\geqslant d_1$。

对于任意一个给定的排序 $\sigma=(J_{(1)},J_{(2)},\cdots,J_{(n)})$,则 $\bar{p}_{(j)},p_{(j)},u_{(j)},b_{(j)},a_{(j)}$分别表示排在第 j 个位置上的工件的正常加工时间,实际加工时间,分配的资源,单位资源的费用,正压缩率。

目标函数是极小化总费用

$$Z=\alpha\sum_{j=1}^{n}C_j+\beta\sum_{j=1}^{n}E_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}T_j+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j$$

其中 C_j 表示排在第 j 个位置上的工件的完工时间,$E_j=\max\{0,d_1-C_j\}$表示排在第 j 个位置上的工件的提前时间,$T_j=\max\{0,C_j-d_2\}$表示排在第 j 个位置上的工件的延误时间。$\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\gamma\geqslant0$ 和 $\delta\geqslant0$ 分别表示总完工时间,提前时间,延误时间和窗口结束时间的单位费用。

引理1 存在最优排序必满足下列2种情况之一:

1)对于窗口的开始时间 d_1,存在某个工件 $J_{(k)}$,使得 $C_k=d_1$。对于窗口的结束时间 d_2,存在某个工件 $J_{(l)}$,使得 $C_l=d_2(l\geqslant k)$;

2)排序从0时刻开始,即 $T=0$。

证明 假设存在某个排序,在 $T>0$ 时刻开始,且在第 k 个位置和第 l 个位置上有工件,使得 $C_k<d_1<C_{k+1}$,$C_l<d_2<C_{l+1}$,令 $\Delta_1=d_1-C_k$,$\Delta_2=C_{l+1}-d_2$,且有 $0<\Delta_1<p_{(k+1)}$,$0<\Delta_2<p_{(l+1)}$。若将 d_2 向右移 Δ_2 个单位时间,则工件的延误时间 $T_j(j=l+1,\cdots,n)$ 变小,窗口结束时间 d_2 变大,总费用的变化量为

$$\Delta Z=-\gamma(n-l)\Delta_2+\delta n\Delta_2=\Delta_2(-\gamma(n-l)+\delta n)$$

若将 d_2 向左移$(p_{(l+1)}-\Delta_2)$个单位时间,则工件的延误时间 $T_j(j=l+1,\cdots,n)$ 变大,窗口结束时间 d_2 变小,总费用的变化量为

$$\Delta Z=\gamma(n-l)(p_{(l+1)}-\Delta_2)-\delta n(p_{(l+1)}-\Delta_2)=(p_{(l+1)}-\Delta_2)(\gamma(n-l)-\delta n)$$

显然,若 $\delta n-\gamma(n-l)<0$,则右移 d_2 会减少总费用,若 $\delta n-\gamma(n-l)>0$,则左移 d_2 会减少总费用(易知,若 $\delta n-\gamma(n-l)=0$,左移或右移 d_2 都不会增加总费用)。因此 d_2 和某个工件的完工时间一致。

假设排在第 l 个位置上的工件在 d_2 处完工,即 $C_l=d_2$,则总费用表示为

$$\begin{aligned}Z(T,\Delta_1)&=\alpha\sum_{j=1}^{n}C_j+\beta\sum_{j=1}^{n}E_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}T_j+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j=\alpha\sum_{j=1}^{n}(T+(n-j+1)p_{(j)})+\\&\beta[\Delta_1+(\Delta_1+p_{(k)})+\cdots+(\Delta_1+p_{(k)}+\cdots+p_{(2)})]+\\&\gamma\sum_{j=l+1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\delta n\left(T+\sum_{i=1}^{l}p_{(j)}\right)+\\&\sum_{j=1}^{n}b_ju_j=(\alpha+\delta)nT+\beta k\Delta_1+C\end{aligned}$$

其中

$$C=\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\beta\sum_{j=1}^{k}(j-1)p_{(j)}+\gamma\sum_{j=l+1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\delta n\sum_{i=1}^{l}p_{(j)}+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j$$

显然 C 与 T,Δ_1 是相对独立的,将 $Z(T,\Delta_1)$看成是关于 T,Δ_1 的一个线性函数,为极小化 Z,所以 $T=0,\Delta_1=0$ 时,得到一个最优排序必满足2种情况之一。 证毕

下面对引理1的2种情况分开讨论。

对于引理1中的情况1),设 $C_k=d_1,C_{k+m}=d_2$,设 k^* 和 m^* 分别是 k 和 m 的最优值。

引理2 在引理1的情况1)下,设 $C_{k^*}=d_1$,$C_{k^*+m^*}=d_2$,则 $k^*=\lceil\frac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}\rceil$。

证明 若将整个排序向左移 $\Delta(>0)$个单位时间,则 $d_1=C_{k^*}+\Delta,d_2=C_{k^*+m^*}+\Delta$,由于原排序为最优排序,所以总费用变化量为

$$\Delta Z=-\alpha n\Delta+\beta k^*\Delta-\gamma(n-k^*-m^*)\Delta\geqslant0$$
$$-\alpha n+\beta k^*-\gamma(n-k^*-m^*)\geqslant0$$

所以 $k^* \geqslant \dfrac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}$。

若将整个排序向右移 $\Delta(>0)$ 个单位时间,则 $d_1 = C_{k^*}-\Delta$,$d_2 = C_{k^*+m^*}-\Delta$,由于原排序为最优排序,所以总费用变化量为

$$\Delta Z=\alpha n\Delta-\beta(k^*-1)\Delta+\gamma(n-k^*-m^*+1)\Delta\geqslant 0$$

$$\alpha n-\beta(k^*-1)+\gamma(n-k^*-m^*+1)\geqslant 0$$

所以,$k^* \leqslant \dfrac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}+1$。

综上可知,$k^* = \left\lceil \dfrac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}\right\rceil$。　　证毕

对于引理 1 的情况 1)中工件的位置权的计算,给出引理 3。

引理 3　在引理 1 的情况 1)下,总费用表示为

$Z=(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\dfrac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_j p_{(j)}$,其中

$$\tilde{w}_j=\begin{cases}(j-1)(\beta-\alpha)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=1,2,\cdots,k^*\\ \alpha(n-j+1)+\delta n-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=k^*+1,\cdots,k^*+m^*\\ (\alpha+\gamma)(n-j+1)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=k^*+m^*+1,\cdots,n\end{cases}$$

证明　对于给定的 k^*,总费用表示为

$$Z=\alpha\sum_{j=1}^{n}C_j+\beta\sum_{j=1}^{n}E_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}T_j+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j=\alpha\sum_{j=1}^{n}(T+(n-j+1)p_{(j)})+\beta\sum_{j=1}^{k^*}(j-1)p_{(j)}+\gamma\sum_{j=k^*+m^*+1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(\bar{p}_j-p_j)}{a_j}=\alpha nT+\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\beta\sum_{j=1}^{k^*}(j-1)p_{(j)}+\gamma\sum_{j=k^*+m^*+1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jp_j}{a_j}$$

其中
$$\alpha nT=\alpha n\left(d_1-\sum_{j=1}^{k^*}p_{(j)}\right)$$
$$\delta nd_2=\delta n\left(d_1+\sum_{j=k^*+1}^{k^*+m^*}p_{(j)}\right)$$

所以
$$Z=(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{k^*}\left[\alpha(n-j+1)+\beta(j-1)-\alpha n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}+\sum_{j=k^*+1}^{k^*+m^*}\left[\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}+\sum_{j=k^*+m^*+1}^{n}\left[(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}=(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{k^*}\left[(j-1)(\beta-\alpha)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}+\sum_{j=k^*+1}^{k^*+m^*}\left[\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}+\sum_{j=k^*+m^*+1}^{n}\left[(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right]p_{(j)}$$

所以 $Z=(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\dfrac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_jp_{(j)}$,其中

$$\tilde{w}_j=\begin{cases}(j-1)(\beta-\alpha)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=1,2,\cdots,k^*\\ \alpha(n-j+1)+\delta n-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=k^*+1,\cdots,k^*+m^*\\ (\alpha+\gamma)(n-j+1)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}, j=k^*+m^*+1,\cdots,n\end{cases}$$

下面讨论 α 与 β 的关系。

首先考虑若 $\alpha<\beta$,提前完工的工件的位置权是 $(j-1)(\beta-\alpha)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}(1\leqslant j\leqslant k^*)$,在窗口中完工的工件的位置权是

$$\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}(k^*+1\leqslant j\leqslant k^*+m^*)$$

延误的工件的位置权是

$$(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}(k^*+m^*+1\leqslant j\leqslant n)$$

其中 k^* 是最大的 j 值,使得

$$(j-1)(\beta-\alpha)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\leqslant \min\left\{\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right\}$$

k^*+m^* 是最大的 j 值,使得

$$\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\leqslant \min\left\{(j-1)(\beta-\alpha)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right\}$$

若没有 j 值满足不等式,则 $m^*=0$,即交货期窗口变成工期。

若 $\alpha>\beta$,则 k^* 前的所有工件的位置权都是负的,且　$(j-1)(\beta-\alpha)-\dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\leqslant$

$$\min\left\{\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right\}$$

对所有 $j=1,2,\cdots,n$ 都成立。所以为极小化总费用,将所有工件尽量往前排,则 $T=0,m^*=0$ 时,就能得到最优排序。实际上,根据 k^* 的值,有 $k^*=\lceil\frac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}\rceil=\lceil\frac{(\alpha+\gamma)n}{\beta+\gamma}\rceil>n$,由于 $k^*>n$,则所有工件都在 d_1 前排完。

若 $\alpha=\beta$,则 k^* 前的所有工件的位置权是 $-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}$,且 $-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\leqslant$

$$\min\left\{\alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},(\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}\right\}$$

对所有 $j=1,2,\cdots,n$ 都成立。所以为极小化总费用,将所有工件尽量往前排,则 $m^*=0$,且最优排序仅包含提前完工的工件,此时工件的位置权只与该工件的单位资源费用和正压缩率有关,所以任意排序都是最优排序。事实上

$$k^*=\lceil\frac{\alpha n+\gamma(n-m^*)}{\beta+\gamma}\rceil=\lceil n-\frac{\gamma m^*}{\beta+\gamma}\rceil\geqslant n-m^*=n$$

所以 $k^*\geqslant n$,若 $k^*>n$,则最优排序在 $T=0$ 时刻开始,若 $k^*=n$,则第 n 个位置上的工件在 d_1 处完工,且排序的开始时间是 $d_1-P+\sum_{j=1}^{n}a_ju_j$。 证毕

对于引理1中情况2)的工件的位置权的计算,给出引理4。

引理4 在引理1的情况2)下,总费用表示为

$$Z=(\beta+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{n}\hat{w}_jp_{(j)}$$

其中 $\hat{w}_j=(\alpha-\beta)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}$。

证明 由于在引理1的情况2)下 $T=0$,而 $d_1>P$,因此所有工件在 d_1 前加工完,窗口中没有工件,即 $d_1=d_2$,且排序中仅有提前完工的工件,此时总费用表示为

$$Z=\alpha\sum_{j=1}^{n}C_j+\beta\sum_{j=1}^{n}E_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}T_j+\delta nd_2+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j=\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\beta\sum_{j=1}^{n}(d_1-C_j)+\delta nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(\bar{p}_j-p_j)}{a_j}=\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\beta\left[n\Delta+\sum_{j=1}^{n}(j-1)p_{(j)}\right]+\delta nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j(\bar{p}_j-p_j)}{a_j}$$

其中 $\Delta=d_1-C_n=d_1-\sum_{j=1}^{n}p_{(j)}$。因此

$$Z=\alpha\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{(j)}+\beta\left[nd_1+\sum_{j=1}^{n}(-n+j-1)p_{(j)}\right]+\delta nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{b_jp_j}{a_j}=(\beta+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{n}\hat{w}_jp_{(j)}$$

其中 $\hat{w}_j=(\alpha-\beta)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}$。 证毕

2 最优资源分配

本节主要讨论最优资源分配的原则,并给出定理1及其证明。

$p^*_{(j)}(\tilde{p}^*_{(j)},\hat{p}^*_{(j)})$ 表示排在第 j 个位置上的工件的最优加工时间,$u^*_{(j)}(\tilde{u}^*_{(j)},\hat{u}^*_{(j)})$ 表示排在第 j 个位置上的工件的最优资源分配,w_j 表示排第 j 个位置上的工件的位置权。

定理1 任意一个给定的排序,最优资源分配由如下决定:若位置权是负的,最优资源分配为0;若位置权是正的,最优资源分配等于它的上界;若位置权是0,则最优资源分配介于0和它的上界之间。

证明 由上一节的讨论,将问题分为 $\alpha=\beta,\alpha<\beta$ 和 $\alpha>\beta$ 这3种情况讨论最优资源分配。

当 $\alpha=\beta$ 时,根据上面的讨论工件 $J_{(j)}$ 的位置权是 $w_j=-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}}<0(1\leqslant j\leqslant n)$。也就是说,所有工件的位置权都是负的,为极小化总费用,则此时最优加工时间为 $p^*_{(j)}=\bar{p}_{(j)}$,最优资源分配 $u^*_{(j)}=0$。

当 $\alpha<\beta$ 时,最优排序在 $T>0$ 时刻开始,有

$$Z=(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}+\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_{(j)}p_{(j)}$$

其中

$$\tilde{w}_j=\begin{cases}(j-1)(\beta-\alpha)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},j=1,2,\cdots,k^*\\ \alpha(n-j+1)+\delta n-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},j=k^*+1,\cdots,k^*+m^*\\ (\alpha+\gamma)(n-j+1)-\frac{b_{(j)}}{a_{(j)}},j=k^*+m^*+1,\cdots,n\end{cases}$$

由于 $(\alpha+\delta)nd_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j\bar{p}_j}{a_j}$ 是固定常数,所以总费用由 $\sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_jp_{(j)}$ 决定。若位置权是负的,则工件的最优加工时间为正常加工时间;若位置权是正的,则将工

件最优加工时间压缩到最小；若位置权等于 0，则工件的最优加工时间介于 $\bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)}$ 和 $\bar{p}_{(j)}$ 之间，即 $\tilde{p}^*_{(j)} = \begin{cases} \bar{p}_{(j)}, \tilde{w}_j < 0 \\ p'_{(j)}, \tilde{w}_j = 0 \\ \bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)}, \tilde{w}_j > 0 \end{cases}$。其中 $\bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)} \leqslant p'_{(j)} \leqslant \bar{p}_{(j)}$，$\tilde{p}^*_{(j)}$ 表示排在第 j 个位置上的最优加工时间，则最优资源分配表示为 $\tilde{u}^*_{(j)} = \dfrac{\bar{p}_{(j)} - \tilde{p}^*_{(j)}}{a_{(j)}}$，$j = 1,2,\cdots,n$。

当 $\alpha > \beta$ 时，最优排序在 $T = 0$ 时刻开始，有

$$Z = (\beta + \delta)nd_1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j\bar{p}_j}{a_j} + \sum_{j=1}^{n} \hat{w}_j p_{(j)}$$

其中 $\hat{w}_j = (\alpha - \beta)(n - j + 1) - \dfrac{b_{(j)}}{a_{(j)}}$。

由于 $(\beta + \delta)nd_1 + \sum_{j=1}^{n} \dfrac{b_j\bar{p}_j}{a_j}$ 是一个固定常数，所以总费用由 $\sum_{j=1}^{n} \hat{w}_j p_{(j)}$ 决定。若位置权是负的，则工件的最优加工时间是正常加工时间；若位置权是正的，则将工件最优加工时间压缩到最小；若位置权等于 0，则工件的最优加工时间介于 $\bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)}$ 和 $\bar{p}_{(j)}$ 之间，即

$$\hat{p}^*_{(j)} = \begin{cases} \bar{p}_{(j)}, \hat{w}_j < 0 \\ p'_{(j)}, \hat{w}_j = 0 \\ \bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)}, \hat{w}_j > 0 \end{cases}$$

其中 $\bar{p}_{(j)} - a_{(j)}\bar{u}_{(j)} \leqslant p'_{(j)} \leqslant \bar{p}_{(j)}$，$\hat{p}^*_{(j)}$ 表示排在第 j 个位置上工件的最优加工时间。因此，最优资源分配可表示为 $\hat{u}^*_{(j)} = \dfrac{\bar{p}_{(j)} - \hat{p}^*_{(j)}}{a_{(j)}}$，$j = 1,2,\cdots,n$。　　证毕

3 最优排序

本节讨论最优排序，由前两节的讨论将问题转化为指派问题。

定理 2　当 $\alpha = \beta$ 时，任意排序都是最优排序，计算复杂性为 $O(n)$。当 $\alpha \neq \beta$ 时，原问题可转化为指派问题，计算复杂性为 $O(n^3)$。

证明　分别讨论 $\alpha = \beta$，$\alpha < \beta$ 和 $\alpha > \beta$ 这 3 种情况的最优排序。

当 $\alpha = \beta$ 时，最优排序在 $[0, d_1 - P]$ 内任意时间开始，对于 $i, j = 1,2,\cdots,n$，设 $w_{ij} = -\dfrac{b_j}{a_j}$，$i = 1,\cdots,n$，此时位置权只与该工件的单位资源费用和正压缩率有关，所以任意排序都是最优排序，且计算复杂性为 $O(n)$。

当 $\alpha < \beta$ 时，最优排序在 $T > 0$ 时刻开始，对于 $i, j = 1,2,\cdots,n$，设

$$\tilde{w}_{ij} = \begin{cases} (i-1)(\beta - \alpha) - \dfrac{b_j}{a_j}, i = 1,2,\cdots,k^* \\ \alpha(n - i + 1) + \delta n - \dfrac{b_j}{a_j}, i = k^* + 1,\cdots,k^* + m^* \\ (\alpha + \gamma)(n - i + 1) - \dfrac{b_j}{a_j}, i = k^* + m^* + 1,\cdots,n \end{cases}$$

并且 $\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} \bar{p}_j, w_j < 0 \\ p'_j, w_j = 0 \\ \bar{p}_j - a_j\bar{u}_j, w_j > 0 \end{cases}$，其中 $\bar{p}_j - a_j\bar{u}_j \leqslant p'_j \leqslant \bar{p}_j$。

显然，最小费用是位置权和最优资源分配的最优组合。位置权与加工的工件有关，所以当 $\alpha < \beta$ 时，可将原问题转化为指派问题。

当 $\alpha > \beta$ 时，最优排序在 $T = 0$ 时刻开始，同样可将原问题转化为指派问题。对于 $i, j = 1,2,\cdots,n$，设 $\hat{w}_{ij} = (\alpha - \beta)(n - i + 1) - \dfrac{b_j}{a_j}$，$i = 1,\cdots,n$，并且 $\hat{p}_{ij} = \begin{cases} \bar{p}_j, w_{ij} < 0 \\ p'_j, w_{ij} = 0 \\ \bar{p}_j - a_j\bar{u}_j, w_{ij} > 0 \end{cases}$，其中 $\bar{p}_j - a_j\bar{u}_j \leqslant p'_j \leqslant \bar{p}_j$。

定义一个 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，由 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$，其中当 $\alpha < \beta$ 时 $c_{ij} = \tilde{w}_{ij}\tilde{p}_{ij}$，当 $\alpha > \beta$ 时 $c_{ij} = \hat{w}_{ij}\hat{p}_{ij}$，$1 \leqslant i, j \leqslant n$。若工件 j 排在第 i 个位置上，则设 $y_{ij} = 1$，否则设 $y_{ij} = 0$，$i, j = 1,2,\cdots,n$，则有如下指派问题。

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} y_{ij} \\ \text{s. t.} \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, j = 1,\cdots,n \\ \qquad \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, i = 1,\cdots,n \\ \qquad y_{ij} = 1 \text{ 或 } y_{ij} = 0, i,j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

其中，当 $\alpha < \beta$ 时，$c_{ij} = \tilde{w}_{ij}\tilde{p}_{ij}$，当 $\alpha > \beta$ 时，$c_{ij} = \hat{w}_{ij}\hat{p}_{ij}$。

因此，当 $\alpha \neq \beta$ 时原问题分别可转化为指派问题，计算复杂性为 $O(n^3)$。　　证毕

4 结束语

本文讨论的是工件的加工时间是资源分配的线

性函数的单机排序问题。其中交货期窗口的开始时间是固定且不受限制的,而窗口的大小是待确定的,当窗口的开始时间与结束时间相同时,交货期窗口就变成了工期。证明了这个问题在 $O(n^3)$ 时间内得到最优解。对于其他资源分配形式,或者其他类型的交货期窗口的问题,还有待进一步讨论。

参考文献:

[1] Vickon R G. Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on a single machine[J]. Operations Research, 1980, 28(5):1155-1167.

[2] Cheng T C E, Oguz C, Qi X D. Due-date assignment for scheduling on a single machine with compressible processing times[J]. International Journal of Production Economics, 1996, 43(2-3):107-113.

[3] Shabtay D, Steiner G. The single-machine earliness-tardiness scheduling problem with due date assignment and resource-dependent processing times[J]. Annals of Operations Research, 2008, 159(1):25-40.

[4] Chio B C, Yoon S H, Chung S J. Single machine scheduling problem with controllable processing times and resource dependent release times[J]. European Journal of Operatinal Research, 2007, 181(2):645-653.

[5] Shabtay D, Steiner G. A survey of scheduling with controllable processing times[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(13):1643-1666.

[6] Liman S D, Panwanlkar S S, Thongmee S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem[J]. Journal of the Operational Research Society, 1998, 49(9):1007-1010.

[7] Janiak A, Janiak W A, Marrek M. Single processor scheduling problems with various models of a due window assignment[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences, 2009, 57(1):95-101.

[8] Liman S D, Panwalkar S S, Thogmee S. A single machine scheduling problem with common due window and controllable processing times[J]. Annals of Operations Research, 1997, 70(0):145-154.

[9] Wan G H. Single machine common due window scheduling with controllable job processing times[J]. Lecture Notes in Computer Science, 2007, 4616:279-290.

[10] Mosheiov G, Sarig A. A multi-criteria scheduling with due-window assignment problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008, 48(5-6):898-907.

[11] Mosheiov G, Sarig A. Minmax scheduling problems with a common due-window[J]. Computer & Operations Research, 2009, 36(6):1886-1892.

[12] Yeung W K, Oguz C, Cheng T C E. Single-machine scheduling with a common due window[J]. Computer & Operations Reasearch, 2001, 28(2):157-175.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling with Common Due-Window Assignment and Controllable Processing Times

GUO Ling, ZHAO Chuan-li

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: We study the scheduling problem on a single machine with common due-window assignment and controllable processing times. It is assumed that the processing times of jobs are given as a linear resource allocation function with costs. The due-window starting time is a given parameter and non-restrictive, and the due-window finishing time is a decision variable (i. e. the size of due-window is to be determined). There is no cost where the job is completed during the due-window, but there is cost where the job is completed prior or after the due-window. The objective is to minimize total costs which include total completion time, earliness, tardiness, the due-window finishing time, and resource allocation costs. We have provided some properties of the optimal solution, and shown that the problem is solvable in polynomial time.

Key words: scheduling; single machine; due-window; controllable processing times; resource allocation

(责任编辑 黄 颖)