2012 年 11 月　　重庆师范大学学报（自然科学版）　　Nov. 2012
第 29 卷 第 6 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 29 No. 6

运筹学与控制论

DOI：CNKI：50－1165/N.20121112.1642.004

带有拒绝工件和机器维修区间的单机排序问题*

张敏娇，罗成新
（沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034）

摘要：考虑带有拒绝工件和机器维修区间的单机排序问题。目标是最小化被加工工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚（被拒绝加工的工件需要支付拒绝惩罚）的和。这个问题是一般意义下 NP-难的，因此需要快速寻找满足指定精确度要求的近似解。为了能在较少的运行时间内得到该问题的较好的近似解，利用削减状态空间方法得到了一个全多项式时间近似方案（FPTAS）。该 FPTAS 是一个具有强多项式运行时间的较优近似方案，其时间复杂性为 $O(n^2/\varepsilon^2)$，其中 n 为输入工件的个数，$\varepsilon>0$ 为任意小的实数。

关键词：单机排序；维修区间；拒绝工件；NP-难；近似算法
中图分类号：O221.7　　文献标志码：A　　文章编号：1672-6693(2012)06-0015-05

在以往的经典排序问题中基本上要求所有工件都被加工，不允许被拒绝，但在实际的生活中，为了满足某种目的、达到一定利益可能会拒绝一部分工件。本文考虑的是机器在某固定区间需要维修且允许有拒绝工件的单机排序问题。目标是最小化被加工工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚的和。该问题在机器可以连续加工的情况下（单机带有拒绝工件使被加工工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚的和最小的排序问题即 $1\,|\,recj\,|\sum C_j+\sum W_j$，其中 $recj$ 为允许带有拒绝工件）已被证明了是一般意义下 NP-难的[1]，所以问题 $1,h\,|\,recj\,|\sum C_j+\sum W_j$（单机允许有机器维修任务（$h$）和拒绝工件（$recj$），总目标函数为被加工工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚之和最小的排序问题）也是一般意义下 NP-难的。

在已有的文献中一部分研究的是机器有维修区间的典型单机排序问题，另一部分研究的是带有拒绝工件的、机器没有维修区间的单机排序问题[2-8]。而本文则将这两种情况结合在一起，即研究带有拒绝工件和机器维修区间的单机排序问题，对该问题给出了一个 FPTAS，而算法运行时间为 $O(n^2/\varepsilon^2)$。

1 问题描述

该问题是对单机上工件集 $J=\{1,2,\cdots,n\}$ 中的 n 个工件进行排序使得被加工工件的总完工时间与被拒绝工件总惩罚的和最小。每个工件 $i\in J$ 的加工时间为 p_i，惩罚为 w_i。机器在区间 $[T_1,T_2]$ 需要维修且机器在每一时刻至多加工一个工件。不失一般性，考虑所有数据都是正整数，并且将工件先按 SPT 规则排好（即 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$），由 SPT 规则的优点知最优排序可由两个按加工时间非增顺序排列的子序列组成。这里仅考虑所有工件不全都排在 T_1 之前的情形。

本文中 $\varphi^*(Q)$ 表示问题 Q 的最优目标值。该问题通过动态规划算法 A 能得到最优解且这个算法通过每次迭代能得到一些状态向量。在第 k 次迭代中 VS_k 表示由本次迭代所产生的状态向量组成的集合。VS_k 中每一个状态向量 $[t,f+V,C]$ 都对应一个前 k 个工件的可行排序，其中 t 表示排在 T_1 之前的最后一个工件的完工时间，f 表示被加工工件的总完工时间，V 表示被拒绝工件的总惩罚，C 表示排在 T_2 之后的相应加工工件的总完工时间。这里对于每个向量中的 C 在算法 A 中可以忽略。

* 收稿日期：2012-01-04　修回日期：2012-06-27　网络出版时间：2012-11-12 16:42:01
资助项目：国家自然科学基金（No. 11171050）
作者简介：张敏娇，女，硕士研究生，研究方向为应用数学；通讯作者：罗成新，E-mail：luochengxin@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20121112.1642.201206.15_004.html

2 近似算法

算法A **第一步**,令 $VS_1=\{[p_1,p_1+0,0],[0,(T_2+p_1)+0,T_2+p_1],[0,0+w_1,0]\}$。

第二步,对于每次迭代 $k\in\{2,3,\cdots,n\}$,由 VS_{k-1} 中的每一向量 $[t,f+V,C]$ 按下述方法构造 VS_k。1)如果 $t+p_k\leqslant T_1$,则将 $[t+p_k,(f+p_k)+V,C]$ 加入 VS_k 中;如果 $t+p_k>T_1$,则将 $[t,(f+(T_2+\sum_{j=1}^{k}P_j-t))+V,C+(T_2+\sum_{j=1}^{k}P_j-t)]$ 加入 VS_k 中;2)若 J_k 被拒绝,则将 $[t,f+(V+w_k),C]$ 加入 VS_k 中。用 VS_k 替换 VS_{k-1}。

第三步,$\varphi^*(Q)=\min_{[t,f+V,C]\in VS_n}\{f+V\}$。

记 UB 为该问题的最优目标值的上界。假设对于每一向量 $[t,f+V,C]\in VS_k$ 均有 $f+V\leqslant UB$,则算法A的运算时间不会超过 nT_1UB。事实上,在算法每次迭代中,t 与 $f+V$ 都是整数且向量集 VS_k 中元素的个数不超过 T_1UB,而算法A的时间复杂性为 $\sum_{j=1}^{n}|VS_k|$。

下面先给出这个问题的一个4-因子近似算法H且令 $UB=\varphi_H(Q)$。利用这样的上界将给出一个FP-TAS。

构造4-因子近似算法的具体思想是对问题 $1,h\parallel\sum C_j$ 所给出的一个2-因子近似算法[3]进行了改进。先给出一些符号的说明:M_l 为临界工件集,其中临界工件为排在 T_2 之后的第一工件,χ 表示由所有拒绝工件组成的集合。具体算法如下。

算法H **第一步**,令 $l=0$,$M_l=\varnothing$。

第二步,令 $\pi(i,l)$ 表示由SPT规则排序得到的集合 $J\backslash M_1$ 中排在第 i 个位置的工件。构造一个排序 $\sigma_l=\langle\pi(1,l),\pi(2,l),\cdots,\pi(\theta(l),l),M_l,\pi(\theta(l)+1,l),\cdots,\pi(n-|M_l|,l)\rangle$,使得 $\sum_{i\in M_l}p_i+\sum_{i=1}^{\theta(l)}p_{\pi(i,l)}\leqslant T_1$ 且 $\sum_{i\in M_l}p_i+\sum_{i=1}^{\theta(l)+1}p_{\pi(i,l)}>T_1$,而集合 M_l 中工件也按SPT规则排。

第三步,如果 $\sum_{i\in M_l}p_i+p_{\pi(\theta(l)+1,l)}\leqslant T_1$,那么 $M_{l+1}=\{\pi(\theta(l)+1,l)\}\cup M_l$;$l=l+1$ 返回第二步,否则到第四步。

第四步,$\lambda_H(Q)=\min_{0\leqslant h\leqslant l}\{\lambda_{\sigma_h}(Q)\}$,$\lambda_{\sigma_h}(Q)=\sum_{j\in\sigma_h}C_j$,将其对应的排序记为 π_H。

第五步,将集合 M_l 中的元素重新编号为 $1',2',\cdots,|M_l|$,把第四步得到的排序 π_H 中满足 $\sum_{j=1}^{i}p_j\leqslant w_i$ $(i=1,2,\cdots,\theta(l))$ 或 $\sum_{j=1'}^{i}p_j\leqslant w_i$ $(i=1',2',\cdots,|M_l|,\theta(l)+1,\cdots,n-|M_l|)$ 的工件按原有顺序排在机器上进行加工,将不满足条件的工件拒绝并将其放入 χ 中,将所有允许加工的工件重新按原有顺序排列并记为 π'_H,$\varphi_H(Q)=\sum_{J_j\in\pi'_H}C_j+\sum_{J_j\in\chi}w_j$。

引理1 算法H的运行时间为 $O(n^2)$。

注 算法的时间复杂性是结合参考文献[2-3]计算得来。

引理2 算法H的目标值 $\varphi_H(Q)$ 与最优值 $\varphi^*(Q)$ 之间满足 $\varphi_H(Q)\leqslant4\varphi^*(Q)$。

证明 由算法H前4步得到的 λ_H 与问题 $1,h\parallel\sum C_j$ 的最优排序 $\pi^{*\prime}$ 对应的最优目标值 λ^* 满足 $\lambda_H\leqslant2\lambda^*$[4]。问题 $1,h|recj|\sum C_j+\sum W_j$ 所对应的最优排序 π^* 中所被拒绝工件在 $\pi^{*\prime}$ 中也相应被拒绝且放入 χ',并将剩下的被加工工件按 $\pi^{*\prime}$ 中原来的顺序排列,将其排列记为 $\pi^{*\prime\prime}$。那么有

$$\lambda_H=\sum_{J_j\in\pi_H}C_j=\sum_{J_j\in\pi'_H}C_j+\sum_{J_j\in\chi}C_j\geqslant\sum_{J_j\in\pi'_H}C_j+\sum_{J_j\in\chi}w_j=\varphi_H(Q)$$

而
$$\lambda_H=\sum_{J_j\in\pi_H}C_j\le 2\lambda^*=2(\sum_{J_j\in\pi^{*\prime}}C_j)=2(\sum_{J_j\in\pi^{*\prime\prime}}C_j+\sum_{J_j\in\chi'}C_j)\le$$
$$2(\sum_{J_j\in\pi^{*\prime\prime}}C_j+\sum_{J_j\in\chi'}\max\{C_j,w_j\})\le 2(\varphi^*(Q)+\varphi^*(Q))=4\varphi^*(Q)$$

即 $\varphi_H(Q)\le 4\varphi^*(Q)$。　　证毕

对任意 $\varepsilon>0$，定义 $LB=\frac{\varphi_H(\wp)}{4}$，$q_1=\lceil\frac{12n}{\varepsilon}\rceil$，$q_2=\lceil\frac{3}{\varepsilon}\rceil$，$\delta_1=\frac{\varphi_H(\wp)}{q_1}$，$\delta_2=\frac{T_1}{q_2}$。

将矩形 $[0,UB]\times[0,T_1]$ 中区间 $[0,UB]$ 分割成 q_1 个长度为 δ_1 的子区间 $I_r^1=[(r-1)\delta_1,r\delta_1]_{1\le r\le q_1}$，将区间 $[0,T_1]$ 分割成 q_2 个长度为 δ_2 的子区间 $I_s^2=[(s-1)\delta_2,s\delta_2]_{1\le s\le q_2}$。用算法 A_ε 中缩减后的向量集 $VS_k^\#$ 来取代向量集 VS_k。

算法 A_ε　第一步，令 $VS_1^\#=\{[p_1,p_1+0,0],[0,(T_2+p_1)+0,T_2+p_1],[0,0+w_1,0]\}$。

第二步，对于每次迭代 $k\in\{2,3,\cdots,n\}$，$VS_{k-1}^\#$ 中的每一向量 $[t,f+V,C]$：1）如果 $t+p_k\le T_1$，则将 $[t+p_k,(f+p_k)+V,C]$ 加入 $VS_k^\#$ 中；如果 $t+p_k>T_1$，则将 $\left[t,\left(f+\left(T_2+\sum_{j=1}^{k}P_j-t\right)\right)+V,C+\left(T_2+\sum_{j=1}^{k}P_j-t\right)\right]$ 加入 $VS_k^\#$ 中；2）若 J_k 被拒绝，则将 $[t,f+(V+w_k),C]$ 加入 $VS_k^\#$ 中。用 $VS_k^\#$ 替换 $VS_{k-1}^\#$。对于 $[t,f+V]_{r,s}$，如果 $f+V\in I_r^1$ 且 $t\in I_s^2$ 是所有向量 $[t,f+V]_{r,s}$ 中最小的，则令 $VS_k^\#=\{[t,f+V,C]_{r,s}\mid 1\le r\le q_1,1\le s\le q_2\}$。

第三步，$\varphi_{A_\varepsilon}(Q)=\min_{[t,f+V,C]\in VS_n^\#}\{f+V\}$。

引理 3　对任意的向量 $[t,f+V,C]\in VS_k$，总存在 $[t^\#,f^\#+V^\#,C^\#]\in VS_k^\#$，使得
$$t^\#\le t,(f^\#+V^\#)\le(f+V)+k\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C+\delta_2\right)$$

证明　当 $k=1$ 时，有 $VS_1=VS_1^\#$，引理显然成立。假设 $k-1$ 时引理成立，即对 $[t',f'+V',C']\in VS_{k-1}$，总存在 $[t'^\#,f'^\#+V'^\#,C'^\#]\in VS_{k-1}^\#$ 使得 $t'^\#\le t'$ 且 $(f'^\#+V'^\#)\le(f'+V')+(k-1)\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)$，那么当 $k=k$ 时，对于 $[t,f+V,C]\in VS_k$ 有如下 3 种情况，分别予以证明。

情形 1，$[t,f+V,C]=[t'+p_k,(f'+p_k)+V',C']$。由假设知对于 $[t',f'+V',C']\in VS_{k-1}$，总存在 $[t'^\#,f'^\#+V'^\#,C'^\#]\in VS_{k-1}^\#$，使得 $t'^\#\le t'$，$(f'^\#+V'^\#)\le(f'+V')+(k-1)\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)$，且 $[t'^\#+p_k,(f'^\#+p_k)+V'^\#,C'^\#]\in VS_k^\#$，而该向量 $[t'^\#+p_k,(f'^\#+p_k)+V'^\#,C'^\#]$ 是算法 A_ε 第 k 次迭代得到的，所以当缩减向量集时它可能被删除，不妨设 $[x,y+z,l]\in VS_k^\#$ 是与 $[t'^\#+p_k,(f'^\#+p_k)+V'^\#,C'^\#]$ 在同一矩形 $I_r^1\times I_s^2$ 中且保留在集合 $VS_k^\#$ 中的向量。那么有
$$x\le t'^\#+p_k\le t'+p_k=t$$
$$y+z\le(f'^\#+p_k)+V'^\#+\delta_1\le(f'+V')+(k-1)\delta_1+(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2)+p_k+\delta_1\le$$
$$(f'+p_k)+V'+k\delta_1+(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2)=(f+V)+k\delta_1+(\frac{\varepsilon}{3}C+\delta_2)$$

情形 2，$[t,f+V,C]=[t',(f'+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'))+V',C'+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t')]$。由假设知对于 $[t',f'+V',C']\in VS_{k-1}$，总存在 $[t'^\#,f'^\#+V'^\#,C'^\#]\in VS_{k-1}^\#$ 使得
$$t'^\#\le t',(f'^\#+V'^\#)\le(f'+V')+(k-1)\delta_1+(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2)$$
$$[t'^\#,(f'^\#+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^\#))+V'^\#,C'^\#+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^\#)]\in VS_k^\#$$

而由于向量 $[t'^\#,(f'^\#+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^\#))+V'^\#,C'^\#+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^\#)]$ 是算法 A_ε 第 k 次迭代得到

的,所以在简化集合时该向量有可能被删除,不妨设与向量

$$[t'^{\#},(f'^{\#}+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^{\#}))+V'^{\#},C'^{\#}+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^{\#})]$$

在同一矩形 $I_r^1\times I_s^2$ 中且保留在集合 $VS_k^{\#}$ 中的向量为 $[x,y+z,l]$。那么有 $x\leqslant t'^{\#}\leqslant t'=t$,

$$y+z\leqslant(f'^{\#}+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^{\#}))+V'^{\#}+\delta_1\leqslant$$

$$(f'+V')+(k-1)\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'^{\#})+\delta_1$$

由于 $t'^{\#}\geqslant t'-\delta_2$ 而 $\delta_2=\dfrac{T_1}{q_2}$,所以有 $\dfrac{\varepsilon}{3}(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t')\geqslant\dfrac{\varepsilon}{3}T_1\geqslant\delta_2$

$$y+z\leqslant(f'+V')+k\delta_1+\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'+\delta_2)\leqslant$$

$$(f'+V')+k\delta_1+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t')+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)+\delta_2\leqslant[(f'+(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t'))+V']+$$

$$k\delta_1+\left[\frac{\varepsilon}{3}C'+\frac{\varepsilon}{3}(T_2+\sum_{j=1}^{k}p_j-t')\right]+\delta_2=(f+V)+k\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C+\delta_2\right)$$

情形3,$[t,f+V,C]=[t',f'+(V'+w_k),C']$。由假设知对于 $[t',f'+V',C']\in VS_{k-1}$,存在 $[t'^{\#},f'^{\#}+V'^{\#},C'^{\#}]\in VS_{k-1}^{\#}$ 有 $t'^{\#}\leqslant t'$,$(f'^{\#}+V'^{\#})\leqslant(f'+V')+(k-1)\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)$,且 $[t'^{\#},f'^{\#}+(V'^{\#}+w_k),C'^{\#}]\in VS_k^{\#}$,而又由于向量 $[t'^{\#},f'^{\#}+(V'^{\#}+w_k),C'^{\#}]$ 是算法 A_ε 第 k 次迭代得到的,所以当缩减向量集时该向量可能被删除,不妨设与向量 $[t'^{\#},f'^{\#}+(V'^{\#}+w_k),C'^{\#}]$ 在同一矩形 $I_r^1\times I_s^2$ 中且保留在集合 $VS_k^{\#}$ 中的向量为 $[x,y+z,l]$。那么有 $x\leqslant t'^{\#}\leqslant t'=t$

$$y+z\leqslant f'^{\#}+(V'^{\#}+w_k)+\delta_1\leqslant(f'+V')+(k-1)\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)+w_k+\delta_1\leqslant$$

$$f'+(V'+w_k)+k\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C'+\delta_2\right)=(f+V)+k\delta_1+\left(\frac{\varepsilon}{3}C+\delta_2\right)$$

综上所述,知命题对任意 k 都成立。 证毕

定理1 对任意 $\varepsilon>0$,由算法 A_ε 得到的目标值 $\varphi_{A_\varepsilon}(Q)$ 满足 $\varphi_{A_\varepsilon}(Q)\leqslant(1+\varepsilon)\varphi^*(Q)$。

证明 由引理3知,对于向量 $[t^*,f^*+V^*,C^*]\in VS_n$,存在 $[t^{\#},f^{\#}+V^{\#},C^{\#}]\in VS_n^{\#}$,使得

$$f^{\#}+V^{\#}\leqslant(f^*+V^*)+n\delta_1+\frac{\varepsilon}{3}C+\delta_2=(f^*+V^*)+n\frac{\varphi_H(Q)}{q_1}+\frac{\varepsilon}{3}C+\frac{T_1}{q_2}=$$

$$(f^*+V^*)+n\frac{\varphi_H(Q)}{\lceil 12n/\varepsilon\rceil}+\frac{\varepsilon}{3}C+\frac{T_1}{\lceil 3/\varepsilon\rceil}\leqslant\varphi^*(Q)+\frac{\varepsilon\varphi_H(Q)}{12}+\frac{\varepsilon}{3}C+\frac{\varepsilon T}{3}=$$

$$\varphi^*(Q)+\frac{\varepsilon LB}{3}+\frac{\varepsilon}{3}C+\frac{\varepsilon T}{3}\leqslant\varphi^*(Q)+\varepsilon\varphi^*(Q)=(1+\varepsilon)\varphi^*(Q)$$

由于 $\varphi_{A_\varepsilon}(Q)\leqslant f^{\#}+V^{\#}$,所以有 $\varphi_{A_\varepsilon}(Q)\leqslant(1+\varepsilon)\varphi^*(Q)$。 证毕

定理2 对任意 $\varepsilon>0$,算法 A_ε 的运行时间为 $O(n^2/\varepsilon^2)$。

证明 由于算法 A_ε 中得到的每一个向量集 $VS_k^{\#}$ 的基数不会超过 q_1q_2,即 $|VS_k^{\#}|\leqslant q_1q_2$,所以 $\sum_{j=1}^{n}|VS_k^{\#}|\leqslant nq_1q_2=n\lceil\frac{12n}{\varepsilon}\rceil\lceil\frac{3}{\varepsilon}\rceil\leqslant n\left(\frac{12n}{\varepsilon}+1\right)\left(\frac{3}{\varepsilon}+1\right)$。而又由于算法H得到的该问题上界的时间复杂性为 $O(n^2)$,所以算法 A_ε 的运行时间为 $O(n^2/\varepsilon^2+n^2)$。 证毕

综合定理1和定理2,算法 A_ε 是一个FPTAS。

3 结论

本文考虑的是有拒绝工件且机器有固定维修区间的单机排序问题,目标是使被加工工件的总完工时间与被拒绝工件的总惩罚之和最小。对于该问题给出了一个较好的近似算法来解决它。在未来的研究中还会进一步将该问题扩展,研究它的加权问题。

参考文献:

[1] Engels D W, Karger D R, Kolliopoulos S G, et al. Techniques for scheduling with rejection[J]. Journal of Algorithms, 2003, 49(1): 175-191.

[2] Zhang L Q, Lu L F, Yuan J J. Single machine scheduling with release dates and rejection[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 198(3): 975-978.

[3] Kacem I, Mahjoub A R. Fully polynomial time approximation scheme for the weighted flow-time minimization on a single machine with a fixed non-availability interval[J]. Computers Industrial Engineering, 2009, 56(4): 1708-1712.

[4] Kacem I. Approximation algorithm for the weighted flow-time minimization on a single machine with a fixed non-availability interval[J]. Computers Industrial Engineering, 2008, 54(3): 401-410.

[5] Kacem I, Chu C, Souissi A. Single machine scheduling with an availability constraint to minimize the weighted sum of the completion times[J]. Computers Operations Research, 2008, 35(3): 827-844.

[6] Chen W J. Minimizing total flow time in the single-machine scheduling problem with periodic maintenance[J]. Journal of the Operational Research Society, 2006, 57(4): 410-415.

[7] Sadfi C, Penz B, Rapine C, et al. An improved approximation algorithm for the single machine total completion time scheduling problem with availability constraints[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 161(1): 3-10.

[8] Kacem I. Fully polynomial time approximation scheme for the total weighted tardiness minimization with a common due date[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(9): 1035-1040.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling Problem with Rejection Jobs and a Fixed Machine Non-Availability Interval

ZHANG Min-jiao, LUO Cheng-xin

(College of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: This paper considers a single machine scheduling problem with rejection jobs and a fixed non-availability interval. The objective is to minimize the sum of the total completion times of the scheduled jobs and the total rejection penalty of the rejected jobs (A job is rejected, in which case a rejection penalty has to be paid). The problem is NP-hard in the ordinary sense. Therefore, we need to find an approximate solution that fulfills the required error bound. To get a better approximation solution in a polynomial running time, we propose a fully polynomial-time approximation scheme (FPTAS) by cutting states space. This FPTAS is a better approximation algorithm and its running time is strongly polynomial, which running time is $O(n^2/\varepsilon^2)$.

Key words: single machine scheduling; non-availability interval; rejection job; NP-hard; approximation algorithm

(责任编辑 黄 颖)