2012 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2012
第 29 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 29 No. 6

运筹学与控制论

DOI:CNKI:50-1165/N.20121112.1642.005

一类带有可控加工时间的单机排序问题*

王 方，赵传立
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要：讨论了具有学习效应的工期指派和可控加工时间的单机排序问题。工件的实际加工时间同时依赖于所排位置和所分配的资源消耗相关的函数，资源消耗分为线性和凸资源消耗 2 种。考虑共同工期、松弛工期和没有限制的工期 3 种工期分派方法。目标是确定工件最优的加工顺序、工期和资源分配量，极小化一个包含提前、延误、工期分派、总完工时间和总资源消耗的总费用函数。对于上述 2 种不同资源消耗函数与 3 种不同的工期分派方法的每一种组合，均给出了多项式时间算法。

关键词：单机；排序；学习效应；资源分配；工期分派
中图分类号：O221.7 文献标志码：A 文章编号：1672-6693(2012)06-0020-06

自 1980 年以来带有可控加工时间的排序问题备受关注，取得了许多研究成果[1-13]。Wang 和 Cheng[1] 讨论了加工时间和释放时间都受资源消耗数量控制的单机排序问题，目标是极小化最大完工时间的费用和总的资源消耗费用。Su 和 Lien[2] 讨论了带有可控加工时间的平行机排序问题，目标是确定每台机器上工件的最优资源分配，极小化最大完工时间。关于带有可控加工时间这类问题更近的综述是 Shabtay 和 Steiner[3] 给出的。关于涉及到工期的排序问题，Seidmann[4] 对带有 DIF 工期分派方法的排序问题给出了一个计算复杂性为 $O(n\log n)$ 的最优算法。Panwalkar[5] 等对带有 CON 工期分派方法的排序问题给出了一个计算复杂性为 $O(n\log n)$ 的最优算法。Cheng[6] 等对带有 SLK 型工期分派方法且具有可控加工时间的单机排序问题，给出了一个计算复杂性为 $O(n\log n)$ 的最优算法。Shabtay 和 Steiner[7] 扩展了 Cheng[6] 的主要结果，在目标函数中增加了最大完工时间的费用，证明了对于 3 种工期分派方法和 2 种资源消耗函数的每一种组合，并给出了多项式时间的最优算法。Biskup[8] 将学习效应引入到排序问题中以来，具有学习效应的排序问题受到了国内外学者的广泛关注，现已成为一个研究比较活跃的排序分支。Biskup[8] 作了带有学习效应的排序问题的一个综述。杨明明等[10] 研究了目标函数为总完工时间，具有某类学习效应的间歇批生产的单机排序问题，对 3 种模型均给出了多项式时间的最优算法。Wang[11] 等讨论了机器具有学习效应，工件的实际加工时间同时依赖于所排位置和分配的资源，目标是极小化一个包含最大完工时间、总完工时间(总等待时间)、不同完工时间的绝对值总和(不同等待时间的绝对值总和)和总资源消耗的总费用。对于这两类目标函数，分别给出了相关问题的多项式时间算法。

本文讨论了一类具有学习效应的工期指派和可控加工时间的单机排序问题。目标函数是包含提前、延误、工期分派、总完工时间和总资源消耗的总费用函数。

1 问题描述及相关的预备性结果

问题可描述如下。

设 n 个工件为 $\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$，所有工件在 0 时刻已经到达，且不允许中断。工件 $J_{[j]}$ 表示在第 j 个位置加工的工件。工件 J_j 的正常加工时间(当工件未排到机器上并且也没有分配资源时，工件原有的加工时间)为 $\bar{p}_j$。问题是需要确定最优的工件加工顺序 $\pi^*=\{J_1^*,J_2^*,\cdots,J_n^*\}$、工期 $d^*=(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_j^*)$ 和资源分配量 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_j^*)$，使得最小化目标函数为一个包含提前、延误、工期分派、总完工时间和总资源消耗的费用函数，即

* 收稿日期：2012-03-05 修回日期：2012-04-20 网络出版时间：2012-11-12 16:42:01
资助项目：国家自然科学基金(No. 10471096)
作者简介：王方，女，硕士研究生，研究方向为排序理论与最优算法；通讯作者：赵传立，E-mail：zhaochuanli@synu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20121112.1642.201206.20_005.html

$$Z(\pi,d,u)=\alpha\sum_{j=1}^{n}E_j+\beta\sum_{j=1}^{n}T_j+\gamma\sum_{j=1}^{n}d_j+\delta\sum_{j=1}^{n}C_j+\sum_{j=1}^{n}v_ju_j \tag{1}$$

其中 C_j 是工件 J_j 的完工时间,$E_j=\max\{0,d_j-C_j\}$ 是工件 J_j 的提前,$T_j=\max\{0,C_j-d_j\}$ 是工件 J_j 的延误,$d_j\geqslant 0$ 是工件 J_j 的工期,u_j 是分配到工件 J_j 上的资源量。$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是非负常数,分别代表工件 J_j 的提前、延误、工期、总完工时间的单位费用,v_j 是分配到工件 J_j 上的资源量的单位费用。

讨论以下 3 种最常见的工期分派方法。

1) CON 型 共同工期分派方法。这里所有工件都分派一个共同工期,即 $d_j=d,j=1,2,\cdots,n$。

2) SLK 型 松弛工期分派方法。这里所有工件都有一个相同的等待时间,即 $d_j=p_j+q$,这里 $q\geqslant 0$ 是一个确定的变量。

3) DIF 型 没有限制的工期分派方法。这里每个工件可以被分派一个不同的且没有限制的工期。

对于加工时间为常数的排序问题,有以下引理成立。

引理 1[5]　对于 CON 工期分派方法,存在一个最优工期等于 $C_{[l^*]}$,这里

$$l^*=\min\left(\max\left(\left\lceil\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}\right\rceil,0\right),n\right) \tag{2}$$

引理 2[6]　对于 SLK 工期分派方法,存在一个最优松弛值 q^*,等于 $C_{[l^*-1]}$,这里 l^* 是(2)式中确定的。

引理 3[4]　对于一个给定的排序和固定的加工时间,关于 DIF 工期分派方法的最优工期定义如下:如果 $\gamma\geqslant\beta$,那么 $d_j=0$;否则,置 $d_j=C_j$,对于 $j=1,\cdots,n$。

当工件所排位置及相关资源分配确定后,工件的实际加工时间是固定的常数。

由引理 1 知,对于给定的排序 $\pi=[J_{[1]},\cdots,J_{[n]}]$ 和资源分配 $u=[u_{[1]},\cdots,u_{[n]}]$,有

$$d_{[j]}^*=d^*=C_{[l^*]}=\sum_{j=1}^{l^*}p_{[j]},j=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$E_{[j]}=\sum_{i=j+1}^{l^*}p_{[i]},j=1,2,\cdots,l^*-1$$

并且 $E_{[l^*]}=0,T_{[j]}=\sum_{i=l^*+1}^{j}p_{[i]},j=l^*+1,\cdots,n$,因此,有

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u))=\alpha\sum_{j=1}^{l^*}(j-1)p_{[j]}+\beta\sum_{j=l^*+1}^{n}(n-j+1)p_{[j]}+\gamma n\sum_{j=1}^{l^*}p_{[j]}+\delta\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=$$
$$\sum_{j=1}^{l^*}[(j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=l^*+1}^{n}[(n-j+1)(\beta+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]} \tag{4}$$

由引理 2 知,对于给定的排序 $\pi=[J_{[1]},\cdots,J_{[n]}]$ 和资源分配 $u=[u_{[1]},\cdots,u_{[n]}]$,有

$$q^*=C_{[l^*-1]}=\sum_{i=1}^{l^*-1}p_{[i]} \tag{5}$$

$$d_{[j]}^*=p_{[j]}+q^*=p_{[j]}+\sum_{i=1}^{l^*-1}p_{[i]},j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

$$E_{[j]}=\sum_{i=j}^{l^*-1}p_{[i]}$$

且 $E_{[l^*]}=0,T_{[j]}=\sum_{i=l^*}^{j-1}p_{[i]},j=l^*+1,\cdots,n$。

因此,有

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u))=\alpha\sum_{j=1}^{l^*-1}jp_{[j]}+\beta\sum_{j=l^*}^{n}(n-j)p_{[j]}+\gamma\sum_{j=1}^{n}\left(p_{[j]}+\sum_{i=1}^{l^*-1}p_{[i]}\right)+\delta\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=$$
$$\sum_{j=1}^{l^*-1}[j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=l^*}^{n}[(n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]} \tag{7}$$

由引理 3,可得 $E_j=0,j=1,2,\cdots,n$。因此,有

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u))=\begin{cases}\beta\sum_{j=1}^{n}C_j+\delta\sum_{j=1}^{n}C_j+\sum_{j=1}^{n}v_ju_j,\gamma\geqslant\beta\\ \gamma\sum_{j=1}^{n}C_j+\delta\sum_{j=1}^{n}C_j+\sum_{j=1}^{n}v_ju_j,\gamma<\beta\end{cases}$$

上式可进一步化解为

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u))=\sum_{j=1}^{n}[(\varepsilon+\delta)(n-j+1)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]} \tag{8}$$

这里 $\varepsilon=\min(\beta,\gamma)$。

后面将分别讨论当加工时间为一个线性资源消耗函数和凸资源消耗函数时,即加工时间不再是固定的情况,如何得到这个问题的目标函数在不同工期分派下的最优解。

2 一个线性资源函数的解

假定工件 $J_{[j]}$ 排在第 r 个位置,其实际加工时间为

$$p_j=\bar{p}_j r^a-a_j u_j,a<0 \tag{9}$$

是一个学习指标。这里 u_j 是指可以分配到工件 J_j 的资源数量,并且有 $0\leqslant u_j\leqslant \bar{u}_j<\frac{\bar{p}_j r^a}{a_j}$,$\bar{u}_j$ 是指可以分配到工件 J_j 的资源量的上界,a_j 是工件 J_j 的一个正的压缩速度。

把(9)式代入(4)、(7)、(8)式,得到目标函数在3种工期分派的最优分派下的表达式分别是

$$\begin{aligned}&Z(\pi,u,d^*(u))=\\&\sum_{j=1}^{l^*}[(j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\\&\sum_{j=l^*+1}^{n}[(n-j+1)(\beta+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j\bar{p}_{[j]}j^a+\sum_{j=1}^{n}(v_{[j]}-W_j a_{[j]})u_{[j]}\end{aligned} \tag{10}$$

这里 $W_j=\begin{cases}(j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta),j=1,\cdots,l^*\\(n-j+1)(\beta+\delta),j=l^*+1,\cdots,n\end{cases}$。

$$\begin{aligned}&Z(\pi,u,d^*(u))=\sum_{j=1}^{l^*-1}[j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\\&\sum_{j=l^*}^{n}[(n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j\bar{p}_{[j]}j^a+\sum_{j=1}^{n}(v_{[j]}-W_j a_{[j]})u_{[j]}\end{aligned} \tag{11}$$

这里

$$W_j=\begin{cases}j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta),j=1,\cdots,l^*-1\\(n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta),j=l^*,\cdots,n\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&Z(\pi,u,d^*(\pi,u))=\\&\sum_{j=1}^{n}[(\varepsilon+\delta)(n-j+1)]p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}=\\&\sum_{j=1}^{n}W_j\bar{p}_{[j]}j^a+\sum_{j=1}^{n}(v_{[j]}-W_j a_{[j]})u_{[j]}\end{aligned} \tag{12}$$

这里 $W_j=(\varepsilon+\delta)(n-j+1),j=1,\cdots,n$。

当加工时间由(9)式确定时,在3种工期分派下的目标函数变为一个关于资源分配的线性函数。于是,最优资源分配可以通过求解这个线性函数的最优解得到,则有以下引理成立。

引理4 在3种工期分派下的任意一种排序中,最优资源分配作为工件序列的一个函数,可以这样确定

$$u_{[j]}^*=\begin{cases}\bar{u}_{[j]},v_{[j]}-W_j a_{[j]}<0\\u_{[j]}\in[0,\bar{u}_{[j]}],v_{[j]}-W_j a_{[j]}=0\\0,v_{[j]}-W_j a_{[j]}>0\end{cases} \tag{13}$$

证明 可以从这3种工期分派下的目标函数(10)~(12)式的任意一个证明即可,假如就以(10)式为例证明。

对(10)式关于 $u_{[j]}$ 求导

$$\frac{\mathrm{d}(Z(\pi,u,d^*(\pi,u)))}{\mathrm{d}(u_{[j]})}=v_{[j]}-W_j a_{[j]},j=1,2,\cdots,n$$

因此,当 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}>0$ 时,应该给工件 J_j 不分配任何资源;当 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}<0$ 时,应该给工件 J_j 分配最大可行的资源量;当 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}=0$ 时,可以给工件 J_j 分配任何可行的资源。 证毕

根据引理4知,对于任意序列,一个工件在某一位置的最优资源分配可以这样得到:如果工件在某个位置的资源权 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}$ 为负,那么给这个位置分配资源的上界 $\bar{u}_{[j]}$;如果资源在某个位置的资源权 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}$ 为正,那么给这个位置分配的资源应为0;如果资源在某个位置的资源权 $v_{[j]}-W_j a_{[j]}$ 为0,那么工件在这个位置得到的最优资源分配应介于0和 $\bar{u}_{[j]}$ 之间的任何值。

由于对于任意一个给定的排序,最优工期和最优资源分配都可以求出来,那这个问题就演变成一个纯粹的序列问题。因此,当加工时间由(9)式确定时,目标函数在3种工期分派下的最优值,可以通过构造一个指派问题得到。

对于目标函数(10)~(12)式,令

$$c_{ij}=\begin{cases}W_j\bar{p}_i j^a,v_i-W_j a_i\geqslant 0\\W_j\bar{p}_i j^a+(v_i-W_j a_i)\bar{u}_i,v_i-W_j a_i<0\end{cases}$$

其中 c_{ij} 依目标函数(10)~(12)式中 W_j 的不同而不同。

然后,定义 x_{ij} 为一个0-1变量,当工件 J_i 排到第 j 个位置时,$x_{ij}=1$;否则,$x_{ij}=0$。对于目标函数(10)~(12)式,指派问题可表示如下 p_1:

$$\begin{cases}\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\\ \text{s.t.} & \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,j=1,\cdots,n\\ & \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,i=1,\cdots,n\\ & x_{ij}=1 \text{ 或 } 0,i,j=1,\cdots,n\end{cases}$$

引理5 对于目标函数(1)式,在3种工期分派下,当加工时间由(9)式确定时的最优序列,可以通

过解一个指派问题在 $O(n^3)$ 时间内得到。

证明参照以上分析。

以下是在 3 种工期分派方法下,当加工时间由(9)式确定时,极小化目标函数的最优算法。

算法 1　步骤 1,对于 CON 型和 SLK 型工期分派方法,通过引理 1 计算 l^*。

步骤 2,对于这 3 种工期分派下的目标函数(10)~(12)式,计算 c_{ij} 的值。

步骤 3,通过解指派问题 P_1 来确定目标函数(10)~(12)式的最优序列,最优序列用 $\pi^* = [1],[2],\cdots,[n]$ 来表示。

步骤 4,对于在 3 种工期分派方法下的目标函数表达式(10)~(12)式,按引理 4 确定最优资源分配,并按(9)式,计算最优加工时间 $p_j = p_j^*(u_{[j]}^*)$。

步骤 5,对于 CON 型,按照(3)式确定最优工期;对于 SLK 型,按(5)、(6)式确定最优工期;对于 DIF 型,按照引理 3 确定最优工期。

定理 1　算法 1 解决了在 3 种工期分派方法下,当加工时间由(9)式确定时,目标函数的最优排序问题可以在 $O(n^3)$ 时间内得到。

证明　引理 1~5 确保了算法的正确性。步骤 1 在常数时间内可以完成;步骤 2、5 在线性时间内执行;步骤 3 在 $O(n^2)$ 时间内完成,步骤 4 在 $O(n^3)$ 时间内完成。因此,算法的整体时间复杂性是 $O(n^3)$。　证毕

3 一个凸资源消耗函数的解

假定工件 $J_{[j]}$ 排在第 r 个位置,其实际加工时间为

$$p_j = \left(\frac{\bar{p}_j r^a}{u_j}\right)^k \tag{14}$$

这里 u_j 是指可以分配到工件 J_j 的资源数量,k 是一个正的常数。

把(14)式代入(4)、(7)、(8)式,得到目标函数在 3 种工期分派的最优分派下的表达式分别是

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u)) = \sum_{j=1}^{l^*}[(j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta)]\left(\frac{\bar{p}_{[j]}j^a}{u_{[j]}}\right)^k + \sum_{j=l^*+1}^{n}[(n-j+1)(\beta+\delta)]\left(\frac{\bar{p}_{[j]}j^a}{u_{[j]}}\right)^k + \sum_{j=1}^{n} v_{[j]}u_{[j]} \tag{15}$$

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u)) = \sum_{j=1}^{l^*-1}[j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta)]\left(\frac{\bar{p}_{[j]}j^a}{u_{[j]}}\right)^k + \sum_{j=l^*}^{n}[(n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta)]\left(\frac{\bar{p}_{[j]}j^a}{u_{[j]}}\right)^k + \sum_{j=1}^{n} v_{[j]}u_{[j]} \tag{16}$$

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u)) = \sum_{j=1}^{n}[(\varepsilon+\delta)(n-j+1)]\left(\frac{\bar{p}_{[j]}j^a}{u_{[j]}}\right)^k + \sum_{j=1}^{n} v_{[j]}u_{[j]} \tag{17}$$

当加工时间由(14)式确定时,在 3 种工期分派下的目标函数(15)~(17)式为一个关于资源分配的凸函数。因此,求解最优资源分配(记作 $u^*(\pi)$)的过程可以看作求解工件序列的一个函数的最优解的过程,则有以下引理成立。

引理 6　最优资源分配 $u^*(\pi)$,作为工件序列的一个函数,是

CON 型: $u_{[j]}^* =$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{k\times((j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta))}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times (\bar{p}_{[j]}j^a)^{\frac{k}{k+1}}, j=1,\cdots,l^* \\ \left(\dfrac{k\times((n-j+1)(\beta+\delta))}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times (\bar{p}_{[j]}j^a)^{\frac{k}{k+1}}, j=l^*+1,\cdots,n\end{cases}$$

SLK 型: $u_{[j]}^* =$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{k\times(j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta))}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times (\bar{p}_{[j]}j^a)^{\frac{k}{k+1}}, j=1,\cdots,l^*-1 \\ \left(\dfrac{k\times((n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta))}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times (\bar{p}_{[j]}j^a)^{\frac{k}{k+1}}, j=l^*,\cdots,n\end{cases}$$

DIF 型:

$$u_{[j]}^* = \left(\frac{k\times(\varepsilon+\delta)(n-j+1)}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times (\bar{p}_{[j]}j^a)^{\frac{k}{k+1}}, j=1,\cdots,n$$

证明　把目标函数(15)~(17)式中的每一个都关于 $u_{[j]}$ 求导,$j=1,\cdots,n$,并令导数为 0,解出 $u_{[j]}=u_{[j]}^*$。　证毕

因为目标函数(15)~(17)式都是凸资源消耗函数,所以,引理 6 提供的是一个最优性的充要条件。

把引理 6 中的 3 种工期分派方法下的最优资源分配分别代入目标函数(15)~(17)得

$$Z(\pi,u,d^*(\pi,u)) = (k^{\frac{-k}{k+1}} + k^{\frac{1}{k+1}}) \times \sum_{j=1}^{n}\theta_{[j]}\times\varphi_{[j]} \tag{18}$$

这里

$$\theta_{[j]} = (v_{[j]}\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}, \varphi_{[j]} = \eta_{[j]}\times j^{\frac{ak}{k+1}} \tag{19}$$

其中,CON:

$$\eta_j=\begin{cases}((j-1)(\alpha-\delta)+n(\gamma+\delta))^{\frac{1}{k+1}}, j=1,\cdots,l^*\\((n-j+1)(\beta+\delta))^{\frac{1}{k+1}}, j=l^*+1,\cdots,n\end{cases}\tag{20}$$

SLK:

$$\eta_j=\begin{cases}(j(\alpha-\delta)+(n+1)(\gamma+\delta))^{\frac{1}{k+1}}, j=1,\cdots,l^*-1\\((n-j)(\beta+\delta)+(\gamma+\delta))^{\frac{1}{k+1}}, j=l^*,\cdots,n\end{cases}\tag{21}$$

DIF: $\eta_j=(((\varepsilon+\delta)(n-j+1))^{\frac{1}{k+1}}, j=1,\cdots,n$ (22)

从目标函数(18)式可以看出,要想得到这个凸资源消耗函数的最优解,必须使得 $\varphi_{[j]}$和 $\theta_{[j]}$的匹配达到最优。最优匹配可以通过以下引理获得。

引理7 目标函数(18)式的最优工件序列应该是这样得到:把最小的 $\varphi_{[j]}$与最大的 $\theta_{[j]}$相匹配,第二小的 $\varphi_{[j]}$与第二大的 $\theta_{[j]}$相匹配,等等。$\varphi_{[j]}$与 $\theta_{[j]}$的下标与工件在最优排序中的位置相对应,$j=1,\cdots,n$。

证明参照文献[12]。

以下算法是对目标函数在3种工期分派方法下,当加工时间由(14)式确定时,得到最优的分析总结。

算法2 步骤1,对于CON型和SLK型工期分派方法,按引理1计算 l^*。

步骤2,对3种工期分派方法下的目标函数(18)式,通过(19)~(22)式,计算 $\theta_{[j]}$和 $\varphi_{[j]}$,$j=1,\cdots,n$。

步骤3,按照引理7把工件重新排序,目标函数的最优序列记为 $\pi^*=[1],[2],\cdots,[n]$。

步骤4,按照引理6求这3种工期分派下的最优资源分配,然后,按(14)式确定出最优加工时间 $p_j=p_j^*(u^*_{[j]})$。

步骤5,对于CON型,按照(3)式确定最优工期;对于SLK型,按(5)、(6)式确定最优工期;对于DIF型,按照引理3确定最优工期。

定理2 算法2在 $O(n\log n)$ 时间内解决了在这3种工期分派方法下的目标函数为一个凸资源消耗函数的最优问题。

证明 引理1~3和引理6~7确保了算法的正确性。步骤1在常数时间内完成,步骤2、3、5在线性时间内执行,步骤4在 $O(n\log n)$ 时间内完成。因此,算法的整体时间复杂性为 $O(n\log n)$。 证毕

4 数值例子

以线性资源函数,CON工期分派方法为例。设

$$n=5, \alpha=1, \beta=2, \gamma=0.4, \delta=3$$
$$v_j=(15,10,14,8,20), \bar{p}_j=(8,12,9,20,15)$$

当加工时间是一个关于资源分配量的线性函数并且机器具有学习效应时,工件 $J_{[j]}$的实际加工时间为 $p_j=\bar{p}_j r^a-a_ju_j$。

设 $a=-1, a_j=(1,2,1,4,3), \bar{u}_j=(3,2,4,1,2)$。

由算法1,有步骤1

$$l^*=\min\left(\max\left(\lceil\frac{5(2-0.4)}{1+2}\rceil,0\right),5\right)=3$$

步骤2,计算

$$c_{ij}=\begin{cases}W_j\bar{p}_ij^a, v_i-W_ja_i\geqslant 0\\W_j\bar{p}_ij^a+(v_i-W_ja_i)\bar{u}_i, v_i-W_ja_i<0\end{cases}$$

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}130&60&34.667&20&8\\156&50&20&10&12\\141&63.500&39&22.5&9\\280&98&42.667&18&8\\193&62.5&27&17.500&15\end{pmatrix}$$

步骤3,通过解指派问题 P_1,得最优序列 $\pi^*=[1,2,5,4,3]$.

步骤4,按引理4确定最优资源分配 u_j^*(当 $v_j-W_ju_j=0$ 时,不妨令 $u_j^*=0$),按(9)式最优加工时间 $p_j^*, u_j^*=(3,2,0,1,0), p_j^*=(5,2,5.1,1.8)$。

步骤5,最优工期 $d^*=C_{[l^*]}=5+2+5=12$,最优目标值 $z(\pi^*,u^*,d^*(u))=272$。

5 结束语

本文讨论的是极小化一个包含提前、延误、工期分派、总完工时间和总资源消耗的费用函数的单机排序问题,这里工件的加工时间和工期都是确定的变量。对这3种工期分派下,并且加工时间同时依赖于所排位置和资源分配的两种资源消耗函数的目标函数均提出了相关问题的多项式时间算法。这个问题在多机环境下或者加工时间为其他资源消耗函数的情形有待进一步研究。

参考文献:

[1] Wang X L, Cheng T C E. Single machine scheduling with resource dependent release times and processing times[J]. European Journal of Operational Research, 2005, 162(3): 727-739.

[2] Su L H, Lien C Y. Scheduling parallel machines with re-

source dependent processing times[J]. International Journal of Production Economics, 2009, 117(2): 256-266.

[3] Shabtay D, Steiner G A. survey of scheduling with controllable processing times[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(13): 1643-1666.

[4] Seidmann A, Panwalkar S S, Smith M L. Optimal assignment of due dates for a single processor scheduling problem[J]. International Journal of Production Research, 1981, 19(4): 393-399.

[5] Panwalkar S S, Smith M L, Seidmann A. Common due date assignment to minimize total penalty for the one machine sched uling problem[J]. Operations Research, 1982, 30(2): 391- 399.

[6] Cheng T C E, Ogaz C, Qi X D. Due-date assignment and single scheduling. with compressible processing times[J]. International Journal of Production Economics, 1996, 43(1): 29-35.

[7] Shabtay D, Steiner G. The single-machine earliness-tardiness scheduling problem with due date assignment and resource-dependent processing times[J]. Annals of Operations and Research, 2008, 159(1): 25-40.

[8] Biskup D. Single-machine scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Reseach, 1999, 115(1): 173-178.

[9] Biskup D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Reseach, 2008, 188(2): 315-329.

[10] 杨明明,张淑娟,韩翔凌. 具有学习效应的间歇批生产的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2011, 28(3): 4-9.

[11] Wang D, Wang M Z, Wang J B. Single-machine scheduling with learning effect and resource-dependent processing times[J]. Computers and Industrial Engineering, 2010, 59(3): 458-462.

[12] Hard G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

[13] Cheng C D, Tang H Y, Zhao C L. Notes on single machine scheduling subject to stochastic breakdowns[J]. Journal of Southwest University: Nature Science Edition, 2008, 30(7): 1-5.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling Problem with Controllable Processing Times

WANG Fang, ZHAO Chuan-li

(School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: In this paper, we consider due date assignment and single-machine scheduling problems with learning effect and controllable processing times. The actual processing time of a job depends on its position in a sequence and related resource consumption which contains linear resource consumption or convex resource consumption. The due date assignment methods studied include the common due date, the slack due date and the unrestricted due date. For each combination of the two resource consumption function and three due date assignment methods, we provide a polynomial-time algorithm to find optimal the job sequence, due date values and resource allocation that minimize an objective function which includes earliness tardiness, due date assignment, the total completion times and total resource consumption.

Key words: single-machine; scheduling; learning effect; resource allocation; due date assignment

(责任编辑 黄 颖)