DOI:CNKI:50-1165/N.20121112.1642.011

一个新的 $_2\psi_2$ 变换公式*

王香丽[1]，魏赞庆[2]，刘冬芳[1]

(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 中海油田服务股份有限公司，河北 三河 065201)

摘要：许多双边基本超几何级数可以从单边基本超几何级数得到，本文对非中止型单边基本超几何级数转换成双边基本超几何级数进行了研究。首先运用基本超几何级数双边拓展的方法，从非中止型 q-Saalschüz 公式出发推导出一个新的双边基本超几何级数 $_2\psi_2$ 与单边基本超几何级数 $_2\phi_1$ 之间的一个变换公式。然后对定理 1 中的 $_2\phi_1$ 使用 Heine′s $_2\phi_1$ 转换公式得出另一个双边基本超几何级数 $_2\psi_2$ 与单边基本超几何级数 $_2\phi_1$ 之间的一个变换公式。最后通过对定理 1 取特殊值 $f=q$ 的方法给出非终止型 q-Vandermonde 公式的一个新证明。

关键词：q-级数；非中止型 q-Saalschüz 公式；非终止型 q-Vandermonde 公式；Heine ′s $_2\phi_1$ 转换公式

中图分类号：O174.6；O157　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2012)06-0047-03

基本超几何级数或称 q-级数在数论、组合数学以及物理学等相关领域都有重要应用。经过 Gauss，Cauchy，Heine，Rogers，Ramanujian，Bailey，Andrew，Askey 等众多数学家的研究，基本超几何级数的理论至今已经发展成为数学的一个重要研究分支。下面首先介绍一些相关的记号和基本知识。

设 $|q|<1$，对于任意给定的复数 a，q-升阶乘的定义为[1-2]

$$(a;q)_0=1,(a;q)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$$

$$(a;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k) \tag{1}$$

$$(a_1,a_2,\cdots,a_m;q)_n=(a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_m;q)_n,\quad n=0,1,2,\cdots,\infty \tag{2}$$

易知

$$(a;q)_n=(a;q)_\infty/(aq^n;q)_\infty \tag{3}$$

$$(aq^{-n};q)_n=(q/a;q)_n(-a/q)^n q^{-\binom{n}{2}} \tag{4}$$

$$(a;q)_{k+n}=(a;q)_n(aq^n;q)_k \tag{5}$$

q-基本超几何级数和双边级数的定义分别为

$$_{r+1}\phi_r(a_1,a_2,\cdots,a_{r+1};b_1,b_2,\cdots,b_r;q,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\cdots,a_{r+1};q)_n x^n}{(q,b_1,b_2,\cdots,b_r;q)_n} \tag{6}$$

$$_r\psi_r(a_1,a_2,\cdots,a_r;b_1,b_2,\cdots,b_r;q,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\cdots,a_r;q)_n x^n}{(b_1,b_2,\cdots,b_r;q)_n} \tag{7}$$

非中止型 q-Saalschüz 公式为[2]

$$_3\phi_2(a,b,c;e,f;q,q)=\frac{(q/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}-\frac{(q/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}\times {}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq/e;q^2/e,qf/e;q,q)$$

其中 $|q|<1$，且 $ef=abcq$. (8)

许多双边基本超几何级数可以从单边基本超几何级数得到。通过 Cauchy 的方法[7-8]可以将终止型的单边基本超几何级数转换成双边基本超几何级数。最近，陈永川教授等在文献[6]中研究了将终止型的单边基本超几何级数转换成双边基本超几何级数，通过转变单边级数的指标 m，然后让 m 趋于无穷大，这样就将单边级数转换成双边级数，把陈永川教授等使用的方法称之为级数的双边拓展法。受此文章的启发，在本文中建立了双边基本超几何级数 $_2\psi_2$ 和单边基本超几何级数 $_2\phi_1$ 之间一个新的变换公式，并由此给出非终止型 q-Vandermonde 公式的一种新证明。

1 定理及证明

定理 1　如果 $a,b,e,f,c\in C$ 且 $\left|\frac{ef}{ab}\right|<|q|<1$，$ef=abcq$，那么

* 收稿日期：2012-04-12　　网络出版时间：2012-11-12 16:42:01

资助项目：重庆师范大学重点基金项目(No.10XLR017；No.2011XLZ07)；重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ120625)；重庆市自然科学基金(No. CSTC2011JJA00024)

作者简介：王香丽，女，硕士研究生，研究方向为数论和特殊函数。

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20121112.1642.201206.47_011.html

$$
{}_2\psi_2(a,b;e,f;q,q)=\frac{(q,f/a,f/b,f/c,qc/f,q/e;q)_\infty}{(c,f,q/a,q/b,aq/e,bq/e;q)_\infty}-\frac{(q,a,b,q/e,qf/e;q)_\infty}{(f,e/q,aq/e,bq/e,q^2/e;q)_\infty}\times {}_2\phi_1(aq/e,bq/e;qf/e;q,q) \tag{9}
$$

证明 可以将(8)式变为下列形式

$$
\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a,b,c;q)_m q^m}{(q,e,f;q)_m}=\frac{(q/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}-\frac{(q/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}\times {}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq/e;q^2/e,qf/e;q,q) \tag{10}
$$

在(10)式中令 $k=-m$,得到

$$
\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(a,b,c;q)_{k+m} q^{k+m}}{(q,e,f;q)_{k+m}}=\frac{(q/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}-\frac{(q/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}\times {}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq/e;q^2/e,qf/e;q,q) \tag{11}
$$

在(11)式中使用(5)式,可得

$$
\frac{(a,b,c;q)_m q^m}{(q,e,f;q)_m}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(aq^m,bq^m,cq^m;q)_k q^k}{(q^{m+1},eq^m,fq^m;q)_k}=\frac{(q/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}-\frac{(q/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e,cq/e,f;q)_\infty}\times {}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq/e;q^2/e,qf/e;q,q) \tag{12}
$$

在(12)式中令 $a=aq^{-m}$, $b=bq^{-m}$, $e=eq^{-m}$, $f=fq^{-m}$ 并应用(3)式,有

$$
\frac{(aq^{-m},bq^{-m},c;q)_m q^m}{(q,eq^{-m},fq^{-m};q)_m}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(a,b,cq^m;q)_k q^k}{(q^{m+1},e,f;q)_k}=\frac{(q^{m+1}/e,f/a,f/b,fq^{-m}/c;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,fq^{-m};q)_\infty}-\frac{(q^{m+1}/e,aq^{-m},bq^{-m},c,qf/e;q)_\infty}{(eq^{-m}/q,aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,fq^{-m};q)_\infty}\times
$$
$$
{}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e;q^{2+m}/e,qf/e;q,q)=\frac{(q^{m+1}/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty(fq^{-m}/c;q)_m}{(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(fq^{-m};q)_m}-\frac{(q^{m+1}/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty(aq^{-m},bq^{-m};q)_m}{(e/q,aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(eq^{-m}/q,fq^{-m};q)_m}\times
$$
$$
{}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e;q^{2+m}/e,qf/e;q,q) \tag{13}
$$

在(13)式中应用(4)式,得到

$$
\frac{(q/a,q/b,c;q)_m(abq/ef)^m}{(q,q/e,q/f;q)_m}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(a,b,cq^m;q)_k q^k}{(q^{m+1},e,f;q)_k}=\frac{(q^{m+1}/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty(qc/f;q)_m(1/c)^m}{(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(q/f;q)_m}-\frac{(q^{m+1}/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty(q/a,q/b;q)_m(abq/ef)^m}{(e/q,aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(q^2/e,q/f;q)_m}\times
$$
$$
{}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e;q^{2+m}/e,qf/e;q,q) \tag{14}
$$

在等式(14)两边同时乘以 c^m,因为 $ef=abcq$,于是,有

$$
\frac{(q/a,q/b,c;q)_m}{(q,q/e,q/f;q)_m}\sum_{k=-m}^{\infty}\frac{(a,b,cq^m;q)_k q^k}{(q^{m+1},e,f;q)_k}=\frac{(q^{m+1}/e,f/a,f/b,f/c;q)_\infty(qc/f;q)_m}{(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(q/f;q)_m}-\frac{(q^{m+1}/e,a,b,c,qf/e;q)_\infty(q/a,q/b;q)_m}{(e/q,aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e,f;q)_\infty(q^2/e,q/f;q)_m}\times
$$
$$
{}_3\phi_2(aq/e,bq/e,cq^{m+1}/e;q^{2+m}/e,qf/e;q,q) \tag{15}
$$

在(15)式中令 $m\to\infty$,并且应用 Tannery's 定理[5],可得

$$
\frac{(q/a,q/b,c;q)_\infty}{(q,q/e,q/f;q)_\infty}{}_2\psi_2(a,b;e,f;q,q)=\frac{(f/a,f/b,f/c;q)_\infty(qc/f;q)_\infty}{(aq/e,bq/e,f;q)_\infty(q/f;q)_\infty}-\frac{(a,b,c,qf/e;q)_\infty(q/a,q/b;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e,f;q)_\infty(q^2/e,q/f;q)_\infty}\times {}_2\phi_1(aq/e,bq/e;qf/e;q,q) \tag{16}
$$

(16)式两边同时除以 $\frac{(q/a,q/b,c;q)_\infty}{(q,q/e,q/f,f;q)_\infty}$,从而得证定理1。 证毕

推论2 如果 $a,b,e,f,c\in C$,且 $\left|\frac{ef}{ab}\right|<|q|<1$, $|bq/e|<1$, $ef=abcq$,那么

$$
{}_2\psi_2(a,b;e,f;q,q)=\frac{(q,f/a,f/b,f/c,qc/f,q/e;q)_\infty}{(c,f,q/a,q/b,aq/e,bq/e;q)_\infty}+\frac{(a,b;q)_\infty}{(e/q-a)(e,f;q)_\infty}{}_2\phi_1(f/b,q;aq^2/e;q,bq/e) \tag{17}
$$

证明 使用 Heine's ${}_2\phi_1$ 转换公式[3-4]

$$
{}_2\phi_1(a,b;c;q,z)=\frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\times {}_2\phi_1(c/b,z;az;q,b) \tag{18}
$$

可将(9)式等号右边第2部分

$$
-\frac{(q,a,b,q/e,qf/e;q)_\infty}{(f,e/q,aq/e,bq/e,q^2/e;q)_\infty}\times {}_2\phi_1(aq/e,bq/e;qf/e;q,q)
$$

化为

$$
-\frac{(q,a,b,q/e,qf/e,bq/e,aq^2/e;q)_\infty}{(f,e/q,aq/e,bq/e,q^2/e,q,qf/e;q)_\infty}\times {}_2\phi_1(f/b,q;aq^2/e;q,bq/e)=
$$

$$-\frac{(a,b,q/e,aq^2/e;q)_\infty}{(f,e/q,aq/e,q^2/e;q)_\infty}{}_2\phi_1(f/b,q;aq^2/e;q,bq/e)=$$

$$-\frac{(a,b;q)_\infty}{(f,e;q)_\infty}\frac{(1-q/e)}{(1-aq/e)(1-e/q)}\times$$

$${}_2\phi_1(f/b,q;aq^2/e;q,bq/e)=$$

$$+\frac{(a,b;q)_\infty}{(e/q-a)(e,f;q)_\infty}{}_2\phi_1(f/b,q;aq^2/e;q,bq/e)$$

从而得证推论 2。 证毕

此外，定理 1 中还包含著名的非终止型 q-Vandermonde 公式[2]，即推论 3。

推论 3 如果 $|q|<1, a,b,c\in C, |c/ab|<1$，那么

$${}_2\phi_1(a,b;c;q,q)+\frac{(a,b,q/c;q)_\infty}{(c/q,aq/c,bq/c;q)_\infty}\times$$

$${}_2\phi_1(aq/c,bq/c;q^2/c;q,q)=\frac{(q/c,abq/c;q)_\infty}{(aq/c,bq/c;q)_\infty}\tag{19}$$

证明 在定理 1 中，令 $f=q$，(9)式就变为

$${}_2\phi_1(a,b;e;q,q)=\frac{(q/c,q/e;q)_\infty}{(aq/e,bq/e;q)_\infty}-$$

$$\frac{(a,b,q/e;q)_\infty}{(e/q,aq/e,bq/e;q)_\infty}\times$$

$${}_2\phi_1(aq/e,bq/e;q^2/e;q,q)\tag{20}$$

此时 $e=abc$，将(20)式等号右边的第 2 项移到等式左边，并且令 $e=c/ab$，然后再令 $e=c$，就得到(19)式。 证毕

参考文献：

[1] Andrews G E. Q-series: Their Development and Applications in Analysis, Number Theory, Combinatorics, Physis, and Computer Algebra, CBMS Regional Conference[C]//Lecture Series. RI: Amer Math Soc, Providence, 1986, 66.

[2] Gasper G, Rahman M. Basic Hypergeometric series, second ED[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[3] Heine E. Untersuchungen über die Reihe[J]. J Reine Angew Math, 1847, 34: 285-328.

[4] Heine E. Handbuch der Kugelfunctionen[J]. Theorie und Anwendungen, 1878, 1: 390-402.

[5] Boas R P. Tannery's theorem[J]. Math Mag, 1965, 38(2): 64-66.

[6] Chen W Y C, Fu A M. Semi-finite forms of bilateral basic hypergeometric series[J]. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 1719-1725.

[7] Jouhet F, Schosser M. Another proof of Bailey's ${}_6\psi_6$ summation theorem[J]. Aequationes Math, 2005, 70: 43-50.

[8] Schlosser M. A simple proof of Bailey's very well-poised ${}_6\psi_6$ summation[J]. Proc Amer Math Soc, 2002, 130: 1113-1123.

Operations Research and Cybernetics

A New Transformation Formula for ${}_2\psi_2$

WANG Xiang-li[1], WEI Zan-qing[2], LIU Dong-fang[1]

(1. College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;
2. China Olified Services Limited Company, Sanhe Hebei 065201, China)

Abstract: Many bilateral basic hypergeometric series can be derived from unilateral basic hypergeometric series, in this paper, we study the nonterminating unilateral basic hypergeometric series shifting into bilateral basic hypergeometric series. Firstly, using the bilateral extension method, we derive a new transformation formula between bilateral basic hypergeometric series ${}_2\psi_2$ and unilateral basic hypergeometric series ${}_2\phi_1$ through the nonterminating form of the q-Saalschüz formula. Secondly, we also deduce another transformation formula between bilateral basic hypergeometric series ${}_2\psi_2$ and unilateral basic hypergeometric series ${}_2\phi_1$ by using the Heine's ${}_2\phi_1$ transformation formula to the ${}_2\phi_1$ series in theory 1. Finally, we give a new proof of the nonterminating extension of the q-Saalschüz formula by taking special value $f=q$ in theory 1.

Key words: q-series; nonterminating form of the q-Saalschüz formula; nonterminating form of the q-Vandermonde formula; Heine's ${}_2\phi_1$ transformation formula

（责任编辑 游中胜）