运筹学与控制论

DOI :10.11721/cqnuj20130105

多目标规划问题的 Φ-严格局部有效解*

何　越，彭建文
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要 本文推广了多目标规划问题(MOP)的严格局部有效解的概念，提出了 Φ-严格局部有效解的概念，从而研究带有不等约束的多目标规划问题的 Φ-严格局部有效解集的刻画。为了建立结构框架，分割了 MOP 的目标指标集来给出它的子问题(RMOP($p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*)$,$\bar{x}$))，它比 MOP 有更少的目标函数。MOP 的 Φ-严格局部有效解(Φ-s. l. e. s.)与它的子问题(RMOP($p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*)$,$\bar{x}$))的局部有效解是有联系的。本文将通过定理来讨论它们的关系。本文还推广了强凸函数，提出了一个凸函数的新概念——Φ-强凸函数，并通过 Φ-强凸函数和 KKT 条件来刻画 MOP 的 Φ-严格局部有效解。

关键词 :多目标规划问题 ;严格局部有效解 ;容许函数
中图分类号 :O221.6　　**文献标志码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2013)01-0021-04

向量优化问题的解的定义和解集的刻画一直备受关注。多目标规划问题(Multiobjective programming problem,MOP)解的概念(比如有效解、弱有效解、真有效解等)已经得到了许多研究[1-8]。本文研究了 Φ-严格局部有效解并对它的解进行刻画。

考虑下面的多目标规划问题

$$(\mathrm{MOP})\begin{cases}\min\ (f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x))\\ \mathrm{s.\,t.}\ \ g_j(x)\leqq 0,j\in Q=\{1,\cdots,q\}\end{cases}$$

设 $F=\{x\in\mathbf{R}^n :g_j(x)\leqq 0,j\in Q\}$是 MOP 的可行解集。$f_i(\cdot)$,$i\in P=\{1,\cdots,p\}$,$g_j(\cdot)$,$j\in Q$ 都是实值函数，P 和 Q 分别是目标函数和约束条件的指标集。

1 基本定义

记 $\mathbf{R}^P$ 为 P 维欧氏空间，$\mathbf{R}^p_+$ 是它的非负象限。下列序关系将会用到 $x<y\Leftrightarrow x_i<y_i,\forall i=1,\cdots,p$;$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i,\forall i=1,\cdots,p,i\neq j$ 且对某些 j 有 $x_j<y_j$;$x\leqq y\Leftrightarrow x_i\leqq y_i,\forall i=1,\cdots,p$;$x\nleqslant y\Leftrightarrow$ 或者 $x_i=y_i$，$\forall i=1,\cdots,p$，或者至少存在一个 j 有 $x_j>y_j$。

定义 1[9]　如果 $\bar{x}\in F$ 存在 $\delta>0$，使得 $\{f(x)\}\cap(f(x)+\mathbf{R}^P_+\setminus\{0\})=\varnothing$;$\forall x\in F\cap B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\}$成立，其中 $B(\bar{x},\delta)$为 $\mathbf{R}^n$ 中以 $\bar{x}$ 为心 δ 为半径的开球，则 $\bar{x}$ 叫做 MOP 的局部有效解。

注 1　如果用 $\mathrm{int}(\mathbf{R}^P_+)$来代替上面关系中的 $\mathbf{R}^P_+\setminus\{0\}$，则 $\bar{x}$ 叫做 MOP 的局部弱有效解，其中 int 表示内部。

定义 2[10]　记 $\Phi:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 为容许函数，如果 Φ 是非减的，$\Phi(0)=0$ 且 $\Phi(t)>0$，记这些函数的集合为 A。

定义 3　设 $\Phi\in A$，若存在常数 $\alpha>0$ 和 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得

$$(f(x)+\mathbf{R}^P_+)\cap B(f(\bar{x}),\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|))=\varnothing,\forall x\in F\cap U\setminus\{\bar{x}\}$$

成立，则称 $\bar{x}$ 是 MOP 的与 Φ 有关的严格局部有效解，简写为 Φ-s. l. e. s. ，记为 $\bar{x}\in strl(f,F;\Phi)$。

注 2　当 $\Phi(t)=t^m$(m 为整数，且 $m\geqslant 1$)时，定义 3 退化为文献[9]中 MOP 的 m 阶严格局部有效解。

命题 1　设 $\Phi\in A$，则 $\bar{x}$ 是 MOP 的 Φ-严格局部有效解当且仅当存在常数 $\alpha>0$ 和 $\bar{x}$ 的邻域 U 使得

$$f(x)\nleqslant f(\bar{x})+\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|),\forall x\in F\cap U\setminus\{\bar{x}\}\tag{1}$$

即对 $\forall x\in F\cap U\setminus\{\bar{x}\}$，下面式子不可能成立 :$f_i(x)\leqq f_i(\bar{x})+\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|)$，$i=1,\cdots,p,i\neq j$，$f_j(x)<f_j(\bar{x})+\alpha_j\Phi(\|x-\bar{x}\|)$，对某些 j。

* 收稿日期 :2012-04-25　　网络出版时间 :2013-01-18　15 :05
资助项目 :国家自然科学基金(No. 11171363)
作者简介 :何越，女，硕士研究生，研究方向为向量优化，E-mail :heyuehl@163.com ;通讯作者 :彭建文，E-mail :jwpeng6@yahoo.com.cn
网络出版地址 :http ://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.21_004.html

证明 若 $\bar{x}$ 是MOP的与 Φ-严格局部有效解,由定义3,存在 $\bar{\alpha}>0$ 和 $\bar{\delta}>0$,使得

$$(f(x)+\mathbf{R}_{+}^{P})\cap B(f(\bar{x}),\bar{\alpha}\Phi(\|x-\bar{x}\|))=\varnothing,\ \forall x\in F\cap B(\bar{x},\bar{\delta})\setminus\{\bar{x}\}$$

如果命题1中(1)式不成立,则对 $\forall\alpha\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{P})$,$\forall\delta>0$,存在 $\forall x\in B(\bar{x},\delta)\cap F\setminus\{\bar{x}\}$ 依赖于 α 和 δ,使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})+\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|)$。取 $\delta=\bar{\delta}$,$\alpha=\dfrac{\bar{\alpha}e}{\sqrt{p}}$,其中 $e=\{1,\cdots,1\}^{t}\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{p})$,则存在 $x\in B(\bar{x},\delta)\cap F\setminus\{\bar{x}\}$ 使得 $\|f(x)-f(\bar{x})\|<\bar{\alpha}\Phi(\|x-\bar{x}\|)$,即 $f(x)\in B(f(\bar{x}),\bar{\alpha}\Phi(\|x-\bar{x}\|))\cap(f(x)+\mathbf{R}_{+}^{p})$。这与假设矛盾。

相反地,若存在 $\alpha\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{P})$ 和 $\delta_0>0$,使得 $f(x)\nleq f(\bar{x})+\alpha_0\Phi(\|x-\bar{x}\|)$,$x\in B(\bar{x},\delta)\cap F\setminus\{\bar{x}\}$,则对 $\forall x\in B(\bar{x},\delta)\cap F\setminus\{\bar{x}\}$,要么 $f_i(x)=f_i(\bar{x})+\alpha_{0i}\Phi(\|x-\bar{x}\|)$,$i=1,\cdots,r$,要么存在指标 $i\in\{1,\cdots,p\}$ 依赖于 x,使得 $f_i(x)>f_i(\bar{x})+\alpha_{0i}\Phi(\|x-\bar{x}\|)$,取 $\alpha=\min_i\{\alpha_{0i}\}$,$\delta=\delta_0$,若 $f_i(x)=f_i(\bar{x})+\alpha_{0i}\Phi(\|x-\bar{x}\|)$ 成立,则 $\|f(x)-f(\bar{x})\|\geqq\sqrt{p}\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|)>\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|)$;若 $f_i(x)>f_i(\bar{x})+\alpha_{0i}\Phi(\|x-\bar{x}\|)$ 成立,则 $\|f(x)-f(\bar{x})\|>\alpha_{0i}\Phi(\|x-\bar{x}\|)\geqq\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|)$。

综上可知,存在 $\alpha>0$ 和 $\delta>0$,使得 $\|f(x)-f(\bar{x})\|>\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|)$,$\forall x\in B(\bar{x},\delta)\cap F\setminus\{\bar{x}\}$,即 $(f(x)+\mathbf{R}_{+}^{P})\cap B(f(\bar{x}),\alpha\Phi(\|x-\bar{x}\|))=\varnothing$,$\forall x\in F\cap U\setminus\{\bar{x}\}$。 证毕

注3 当 $\Phi(t)=t^{m}$(m 为整数,且 $m\geqslant1$)时,命题1退化为文献[9]中的命题1.1。

2 分割目标指标集

本节研究有多少个目标函数是真正需要决定所给可行域中的点是否为MOP的 Φ-s.l.e.s.这一问题。

引理1 $\bar{x}$ 是MOP的 Φ-严格局部有效解当且仅当存在常数 $\alpha\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{p})$,使得 $\bar{x}$ 是 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 问题的局部有效解,其中 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 为

$$(\text{MOP})_{\alpha}\begin{cases}\min\ (f_1(x)-\alpha_1\Phi(\|x-\bar{x}\|)),\cdots,f_p(x)-\alpha_p\Phi(\|x-\bar{x}\|))\\ \text{s.t. } x\in F\end{cases}$$

接下来分割目标函数的指标集 p 为下列3个集合

$$s_{\alpha,\delta}^{\leqq}(x^{*})=\{x\in F\cap B(x^{*},\delta)\setminus\{x^{*}\}:f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|)\leqq f_i(x^{*})-\alpha_i\Phi(\|x^{*}-\bar{x}\|),\forall i\in p\}$$

$$p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})=\{i\in p:x\in s_{\alpha,\delta}^{\leqq}\Rightarrow f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|)=f_i(x^{*})-\alpha_i\Phi(\|x^{*}-\bar{x}\|)\}$$

$$p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*})=\{i\in p:\exists x\in s_{\alpha,\delta}^{\leqq}\text{ s.t. }f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|)<f_i(x^{*})-\alpha_i\Phi(\|x^{*}-\bar{x}\|)\}$$

现在考虑下面的多目标规划问题 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$,它比MOP有更少的目标函数。

$$\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})\begin{cases}\min\limits_{x}\{f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|):i\in p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*})\}\\ \text{s.t. }f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x-\bar{x}\|)\leqq f_i(\bar{x}),i\in p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})\\ \qquad g_j(x)\leqq0,j\in Q\end{cases}$$

设 $F'=\{x\in F:f_i(x)-\alpha_i\Phi(x-\bar{x})\leqq f_i(\bar{x}),i\in p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})\}$,则 F' 为 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$ 的可行解集。显然 F' 依赖于 $\bar{x},x^{*},\alpha,\delta$。并且,易知如果 x^{*} 不是 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 的局部有效解,则,$s_{\alpha,\delta}^{\leqq}(x^{*})\neq\varnothing$,且 $p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*})\neq\varnothing$。因此,如果问题 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$ 可以被定义,则要求 x^{*} 不是 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 的局部有效解。且 $p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*})\cup p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})=p$。因此,如果 $p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})=\varnothing$,则前面的问题等同于 $(\text{MOP})_{\alpha}$。

注4 当 $\Phi(t)=t^{m}$(m 为整数,且 $m\geqslant1$)时,引理1退化为文献[9]中的引理2.1。

定理1 设 $\bar{x}$ 是MOP的 Φ-s.l.e.s.,且有命题1确定的相应的 $\alpha\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{p})$,$\delta>0$。对 $\forall x^{*}\in F$ 且 x^{*} 不是 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 的局部有效解,则 $\bar{x}$ 是 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$ 的局部有效解。

证明 设 $\forall x^{*}\in F$ 不是 $(\text{MOP})_{\alpha}$ 的局部有效解,$\bar{x}$ 不是 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$ 的局部有效解。则存在 $x_{\delta}\in F\cap B(\bar{x},\bar{\delta})\setminus\{\bar{x}\}$,使得

$$f_i(x_{\delta})-\alpha_i\Phi(\|x_{\delta}-\bar{x}\|)\leqq f_i(\bar{x}),\ \forall i\in p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*})$$

$$f_k(x_{\delta})-\alpha_k\Phi(\|x_{\delta}-\bar{x}\|)<f_k(\bar{x}),\text{对某些 }k\in p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),f_j(x_{\delta})-\alpha_j\Phi(\|x_{\delta}-\bar{x}\|)\leqq f_j(\bar{x}),\ \forall j\in p_{\alpha,\delta}^{=}(x^{*})$$

其中最后一个不等式考虑到 $x_{\delta}\in F'$。上面不等式与(1)式相矛盾。 证毕

注5 当 $\Phi(t)=t^{m}$(m 为整数,且 $m\geqslant1$)时,定理1退化为文献[9]中的定理2.1。

定理2 若存在 $x^{*}\in F$,$\alpha\in\operatorname{int}(\mathbf{R}_{+}^{p})$ 和 $\delta>0$ 使得 $x_{\delta}\in F'$ 是 $\text{RMOP}(p_{\alpha,\delta}^{<}(x^{*}),\bar{x})$ 的局部有效解。且设

$$f_i(\bar{x})+\alpha_i\Phi(\|x^{*}-\bar{x}\|)\leqq f_i(x^{*}),\ \forall i\in p \tag{2}$$

则 $\bar{x}$ 是具有相应的 α 和 δ 的 MOP 的 Φ-s. l. e. s.。

证明　若 $\bar{x}$ 不是 MOP 的具有相应的 α 和 δ 的 Φ-s. l. e. s.,则存在 $x_{\alpha\delta}\in F\cap B(\bar{x},\delta)\setminus\{\bar{x}\}$使得

$$f_i(x_{\alpha\delta})-\alpha_i\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)\leqq f_i(\bar{x}),\forall i\in p \tag{3}$$

$$f_k(x_{\alpha\delta})-\alpha_k\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)<f_k(\bar{x}),\text{对某些 } k\in p \tag{4}$$

则有两种可能:要么 $k\in p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*)$,要么 $k\in p^{=}_{\alpha,\delta}(x^*)$。

1)如果 $k\in p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*)$,则(3)、(4)式与 $\bar{x}$ 是 RMOP$(p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*),\bar{x})$的局部有效解相矛盾。

2)若 $k\in p^{=}_{\alpha,\delta}(x^*)$。则　$f_i(x_{\alpha\delta})-\alpha_i\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)\leqq f_i(\bar{x}),\forall i\in p^{=}_{\alpha,\delta}(x^*)$

$f_k(x_{\alpha\delta})-\alpha_k\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)<f_k(\bar{x}),\forall i\in p^{<}_{\alpha,\delta}(x^*)$,$f_k(x_{\alpha\delta})-\alpha_k\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)<f_k(\bar{x})$,对某些 $k\in p^{=}_{\alpha,\delta}(x^*)$

由上面3个不等式与(2)式可以得到 $f_i(x_{\alpha\delta})-\alpha_i\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)\leqq f_i(\bar{x})\leqq f_i(x)-\alpha_i\Phi(\|x^*-\bar{x}\|),\forall i\in p$,即具有指标 k 的严格不等式。因此 $x_{\alpha\delta}\in s^{\leqq}_{\alpha,\delta}$,且 $f_k(x_{\alpha\delta})-\alpha_k\Phi(\|x_{\alpha\delta}-\bar{x}\|)<f_k(x^*)-\alpha_k\Phi(\|x^*-\bar{x}\|)$,这与 $k\in p^{=}_{\alpha,\delta}(x^*)$ 矛盾。由上面的假设可知,$\bar{x}$ 是 MOP 的 Φ-s. l. e. s.。　证毕

注6　当 $\Phi(t)=t^m$(m 为整数,且 $m\geqslant 1$)时,定理2退化为文献[9]中的定理2.2。

定义4　实值函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 叫做是凸集 $X\subset\mathbf{R}^n$ 上 $m>0$ 阶 Φ-强凸函数,如果存在常数 $c>0$ 使得

$$f(\beta x+(1-\beta)y)\leqslant\beta f(x)+(1-\beta)f(y)-c\beta(1-\beta)\Phi(\|x-y\|),\forall x,y\in X,\forall\beta\in[0,1]$$

注7　当 $\Phi(t)=t^m$(m 为整数,且 $m\geqslant 1$)时,则定义退化为文献[11]中的定义1.3。

定理3　若 $f_i,i=1,\cdots,p$ 是凸集 X 上的 Φ-强凸函数,则 $\sum_{i=1}^{p}t_if_i$ 和 $\max_{1\leqslant i\leqslant m}f_i$ 也是 X 上的 Φ-强凸函数,其中 $t_i>0,i=1,\cdots,p$。

由定义4立即可证得定理3。

定理4　设 $X\subseteq\mathbf{R}^m$ 是凸的,且 $f:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ 在包含 X 的开集 K 上是连续可微的。则 f 在 X 上是 Φ-强凸函数,当且仅当存在常数 $c>0$,使得

$$f(y)\geqslant f(x)+(y-x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)+c\Phi(\|x-y\|),\forall x,y\in X \tag{5}$$

证明　设 f 在 X 上是 Φ-强凸函数,且 c 是在定义4中出现过的常数,则对 $\forall x,y\in X$ 和 $t\in(0,1)$ 有

$$f(ty+(1-t)x)\leqslant tf(y)+(1-t)f(x)-ct(1-t)\Phi(\|x-y\|)$$

变形可得

$$f(y)-f(x)\geqslant\frac{f(ty+(1-t)x)}{t}+c(1-t)\Phi(\|x-y\|)=$$

$$(y-x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\xi(y-x))+c(1-t)\Phi(\|x-y\|)$$

对某些 $\xi\in(0,t)$,令 $t\to 0$,由 ∇f 的连续性即可得到(5)式成立。

相反地,设(5)式对某些 $c>0$ 成立,对 $\forall x,y\in X$ 和 $t\in(0,1)$,有

$$f(x)-f(tx+(1-t)y)\geqslant(1-t)(x-y)^{\mathrm{T}}\nabla f(tx+(1-t)y)+c(1-t)\Phi(\|x-y\|)$$

$$f(y)-f(tx+(1-t)y)\geqslant t(y-x)^{\mathrm{T}}\nabla f(tx+(1-t)y)+ct\Phi(\|x-y\|)$$

即可得到 $f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)-ct(1-t)\Phi(\|x-y\|)$。也即是说,$f$ 在 X 上是 Φ-强凸函数。

证毕

定理5　设函数 $f_i,i=1,\cdots,p$ 和 $g_j,j=1,\cdots,r$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开凸子集 X 上连续可微的 Φ-强凸函数。且设 $(x,\lambda,\mu)\in X\times\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^r$ 满足 KKT 条件 $\begin{cases}\lambda^t\nabla f(x)+\mu^t\nabla g(x)=0\\ \mu^tg(x)=0\\ \lambda>0,\mu\geqq 0\end{cases}$,则 x 是 MOP 的 Φ-严格局部有效解。

证明　利用函数 f_i 和 g_i 的严格凸性,定理3和定理4及 KKT 条件可得,存在一些 $c>0$,使得 $\lambda^tf(y)+u^tg(y)\geqq\lambda^tf(x)+c\Phi(\|x-y\|),\forall x,y\in X$。则对 $\forall y\in S$,有

$$\lambda^tf(y)\geqq\lambda^tf(x)+c\Phi(\|x-y\|) \tag{6}$$

设 $\alpha_i=\dfrac{c}{p\lambda_i}$,$1\leqslant i\leqslant p$,$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)^t$,则由(6)式及 $\lambda>0$ 可得 $f(y)\nleqslant f(x)+\alpha\Phi(\|x-y\|),\forall y\in S$,即 x 是 MOP 的 Φ-严格局部有效解。　证毕

注8　当 $\Phi(t)=t^m$(m 为整数,且 $m\geqslant 1$)时,定理5退化为文献[11]中的定理2.13。

3 总结

本文研究了 Φ-严格局部有效解,并通过分割目标指标集,建立了 Φ-严格局部有效解与它的子问题的局部有

效解的关系。文献[9]中也进行了高阶有效解的刻画,事实上,本文结果是文献[9,11]中相应结果的推广。

参考文献:

[1] Gueraggio A, Molho E, Zaffaroni A. On the notion of proper efficiency in vector optimization[J]. J Optimiz Theory Appllic, 1994, 82: 1-21.

[2] Jahn J. Vector optimization: theory[M]. Applications and Extensions. Springer-Verlag, Berlin. 2004.

[3] Li Z F, Wang S Y. Lagrange multiplier and saddle point in the multiobjective programming[J]. J Optimiz Theory Appl, 1984, 83: 63-81

[4] Luc D T. Theory of vector optimization lecture notes in economics and mathematical systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989: 319.

[5] Rooyen M V, Zhou X, Zloblec S. A saddle point characterization of Pareto optima[J]. Math Programming, 1994, 67: 77-88.

[6] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T. Theory of multiobjective optimization[M]. Orlando: Academic Press, 1985.

[7] Wang S, Li Z. Scalarization and Lagrangian duality in multiobjective optimization[J]. Optimization, 1992, 26: 315-324.

[8] Yu P L. Multiple-criteria decision making: concepts, techniques and extensions[J]. New York: Plenum Press, 1985.

[9] Gupta A, Mehra A, Bhatia D. Characterizing strict efficiency for convex multiobjective programming problems[J]. J Glob Optim, 2011, 49: 265-280.

[10] Flores-Bazan F, Jimenez B. Strict efficiency in set-valued optimization[J]. SIAM J Control Optim, 2009, 48: 881- 908.

[11] Gupta A, Mehra A, Bhatia D. Higher order efficiency, saddle point optimimality and duality for vector optimization problems[J]. Number Funct Anal Optim, 2007, 20: 339-352.

Operations Research and Cybernetic

Φ-strict Local Efficient Solution for Multiobjective Programming Problems

HE Yue, PENG Jian-wen

(Dept. of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The article generalizes the strict efficient solution of multiobjective programming problem (MOP) to Φ-strict local efficient solution concept, thus pertains to characterize Φ-strict local efficient solution for multiobjective programming problems (MOP) with inequality constraints. To create the necessary framework, we partition the index set of objective of MOP to give rise to subproblem (RMOP $(P^{<}_{\alpha,\delta}(x^*), \bar{x})$). The Φ-strict local efficient solution (Φ-s. l. e. s) for MOP is related to the local efficient solution of a subproblem (RMOP$(P^{<}_{\alpha,\delta}(x^*), \bar{x})$), having lesser number of objective functions, with MOP. This paper will discuss their relationship. We will through the theorem discuss their relationship. We also generalize the strong convex function; put forward a new concept of convex function —Φ-strongly convex function, and by the strong convex function and KKT conditions to characterize Φ-strict local efficient solution for MOP.

Key words: multiobjective programming problems; strict local efficient solution; admissible function

(责任编辑 黄 颖)