2013 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2013
第 30 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 1

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130107

一类伪线性优化问题解集的刻画*

陈 林, 龙莆均
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要:凸和广义凸在数理经济、工程学、管理科学和最优化理论中有着很重要的地位。本文在广义不变凸性下主要研究了一类非线性优化问题解集的刻画。文中利用了 Dini 上方向导数和 Lagrange 乘子研究了一类带约束的 η-伪线性优化问题解集的刻画。首先在 Dini 上方向导数的背景下,给出了此类带约束的非可微伪线性规划问题的一些性质;然后在一定条件下证明了此类问题的可行集和最优解集是不变凸的;最后利用 Dini 上方向导数和 Lagrange 乘子得到了最优解集的一些等价刻画。

关键词:η-伪线性优化问题;Dini 上方向导数;解集刻画;Lagrange 乘子
中图分类号:O221.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)01-0030-03

最近,文献[1]对可微的无约束伪不变凸极值问题的解集进行了刻画,文献[2]进一步研究了非可微的极值问题的解集刻画。文献[3]提出了一类新的伪凸函数。本文基于这类函数的基本性质,给出了非可微伪线性规划问题解集的刻画。

1 预备知识

定义 1[4] 设 $\varphi:X\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,定义 $\varphi^+(x,v)$为 φ 在 x 处沿方向 $v\in\mathbf{R}^n$ 的 Dini 上方向导数,且记为$\varphi^+(x;v)=\limsup\limits_{\lambda\downarrow 0}\dfrac{\varphi(x+\lambda v)-\varphi(x)}{\lambda}$。

定义 2[5] 称集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $y+\lambda\eta(x,y)\in\Gamma$。

定义 3[6] 设 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}^n$,称 η 满足条件 C,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$$

定义 4[7] 称 f 满足条件 D,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$。

定义 5[3] 集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,称 f 在 Γ 上是径向上半连续的,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $g(\lambda)=f(y+\lambda\eta(x,y))$ 在$[0,1]$上是上半连续的。

定义 6[8] 函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,称为:1)正齐次的,若 $\forall x\in\mathbf{R}^n$, $\forall r>0$, $f(rx)=rf(x)$;2)次奇的,若 $\forall x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, $f(x)+f(-x)\geqslant 0$。

显然,Dini 上方向导数关与第二分量是正齐次的。

定义 7[9] 设 Γ 关于 η 为不变凸集,称 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的伪不变凸的,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $f^+(x;\eta(y,x))\geqslant 0\Rightarrow f(y)\geqslant f(x)$。

定义 8[9] Γ 关于 η 为不变凸集,称 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的伪不变凹的,若 $\forall x,y\in\Gamma$, $f^+(x;\eta(y,x))\leqslant 0\Rightarrow f(y)\leqslant f(x)$。

定义 9[9] 设集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,称 $f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的伪线性函数,如果 f 既是关于 η 的伪不变凸函数,也是关于 η 的伪不变凹函数。

2 一类非线性优化问题解集的刻画

考虑如下非线性优化问题

* 收稿日期:2012-05-24 修回日期:2012-06-29 网络出版时间:2013-01-18 15:05
资助项目:重庆市教委科技研究项目(No. KJ100608);重庆市自然科学基金项目(No. CSTC2010BB2090)
作者简介:陈林,男,硕士研究生,研究方向为最优化理论与方法,E-mail:470994736@qq.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.30_006.html

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\min f(x)\\ \mathrm{s.\,t.}\ \ g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p\end{cases}$$

其中 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$ 是一个向量值函数,上式中并没有出现向量值函数 $\eta:\Gamma\times\Gamma\to\mathbf{R}$,集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 和 $g_i:\Gamma\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,p)$。假设问题(P)的解集非空,记 $A:=\{x\in\Gamma:g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p\}$,$S:=\arg\min_{x\in A}f(x)$,令 $I=\{1,2,\cdots,p\}$,$z\in S$,$I(z)=\{i\in I:g_i(z)=0\}$,其中目标函数 $f(x)$ 和约束函数 $g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,p)$ 都是 η-伪线性函数。

引理 1[3]　集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,并且:1)f 在 Γ 上是径向上半连续的;2)f 满足条件 D,η 满足条件 C;3)f^+ 关于第二分量是次奇的;4)f 在 Γ 上是关于 η 的伪不变凸函数。则 f 在 Γ 上是关于 η 的预拟不变凸函数。

引理 2[9]　如果引理 1 的条件满足,则 $\forall x,y\in\Gamma, f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow f^+(y;\eta(y,x))\leqslant 0$。

引理 3[9]　设 $z\in S$,并且:1)$\forall i\in I, g_i$ 在 Γ 上是径向上半连续的;2)$\forall i\in I, g_i$ 在 Γ 上是 η-伪线性函数;3)$\forall i\in I, g_i$ 满足条件 D,η 满足条件 C;4)$\forall x\in\Gamma, f^+(x;\cdot)$ 和 $g_i^+(x;\cdot)$ $(\forall i\in I)$ 关于第二分量是次可加的;5)满足 Slater 约束规格,即 $\exists\hat{x}\in\Gamma$, s. t. 对 $\forall i\in I(z), g_i(\hat{x})<0$。则存在 Lagrange 乘子 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in\mathbf{R}_+^m$,使得 $\forall x\in\Gamma$,且

$$f^+(z;\eta(x,z))+\sum_{i\in I(z)}\lambda_i g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0 \tag{1}$$

$$\lambda^t g(z)=0 \tag{2}$$

引理 4[10]　集合 Γ 是关于 η 的不变凸集,$f:\Gamma\to\mathbf{R}$ 是关于 η 的预拟不变凸函数当且仅当 f 的下水平集是关于 η 的不变凸集。

下面利用 Dini 上方向导数和 Lagrange 乘子对问题(P)的解集进行了刻画。这些结果可用于寻找出此类优化问题的所有最优解。

定理 1　假设 $z\in S$,并且引理 3 的条件满足,此外:1)f 在 Γ 上是径向上半连续的;2)f 是 η-伪线性函数且满足条件 D;3)f^+ 关于第二分量是次奇的。则可行域 A 是关于 η 的不变凸集,解集 S 也是关于 η 的不变凸集。

证明　由假设可知,引理 1 成立,则 $\forall i\in I, g_i$ 在 Γ 上是关于 η 的预拟不变凸函数;再由引理 4,$\forall i\in I, g_i$ 的下水平集是关于 η 的不变凸集。于是 $A:=\bigcap_{i\in I}\{x\in\Gamma:g_i(x)\leqslant 0\}$ 是关于 η 的不变凸集。显然,$S=\{x\in A:f(x)\leqslant f(z)\}$ 也是关于 η 的不变凸集。　　证毕

定理 2　假设 $z\in S$,并且引理 3 的条件满足,此外:1)f 在 Γ 上是径向上半连续的;2)f 是 η-伪线性函数且满足条件 D;3)f^+ 关于第二分量是次奇的。则 $S=\hat{S}_1=\hat{S}_2=\hat{S}_3=\hat{S}_4=\hat{S}_5$,其中

$$\hat{S}_1=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))=0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

$$\hat{S}_2=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

$$\hat{S}_3=\{x\in\Gamma:f^+(x;\eta(z,x))=0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

$$\hat{S}_4=\{x\in\Gamma:f^+(x;\eta(z,x))\geqslant 0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

$$\hat{S}_5=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))=f^+(x;\eta(z,x))=0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

证明　显然有 $\hat{S}_5\subseteq\hat{S}_1\subseteq\hat{S}_2$,$\hat{S}_5\subseteq\hat{S}_3\subseteq\hat{S}_4$。故只需证明 $S\subseteq\hat{S}_5$、$\hat{S}_2\subseteq S$、$\hat{S}_4\subseteq S$ 即可。先证 $S\subseteq\hat{S}_5$。设 $\forall x\in S$,则 $f(x)=f(z)$。由引理 2,f 是关于 η 的预拟不变凸函数,于是

$$f^+(x;\eta(z,x))\leqslant 0, f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0 \tag{3}$$

而 S 是关于 η 的不变凸集,所以对 $\forall\lambda,\bar{\lambda}\in[0,1]$,由(3)式有 $z+\lambda\eta(x,z)\in S$,$x+\bar{\lambda}\eta(z,x)\in S$。于是

$$f(z+\lambda\eta(x,z))=f(z), f(x+\bar{\lambda}\eta(z,x))=f(x) \tag{4}$$

由 Dini 上方向导数的定义和(4)式可知 $f^+(x;\eta(z,x))=0$,$f^+(z;\eta(x,z))=0$,故 $x\in\hat{S}_5$。然后证 $\hat{S}_2\subseteq S$。设 $\forall x\in\hat{S}_2$,则 $f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0$;$\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0$;$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0$。由 $\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0$;$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0$,于是 $x\in A$。因为 f 是关于 η 的伪不变凹函数,而 $f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0$,于是 $f(x)\leqslant f(z)$。

注意到 $z\in S$,于是 $x\in S$。最后证 $\hat{S}_4\subseteq S$,设 $\forall x\in\hat{S}_4$,则 $f^+(x;\eta(z,x))\geqslant 0$;$\forall i\in\tilde{I}(z), g_i(x)=0$;$\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0$。显然,$x\in A$。因为 f 是关于 η 的伪不变凸函数,而 $f^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0$,于是 $f(x)\leqslant f(z)$。注意到 $z\in S$,于是 $x\in S$。

定理 3　假设 $z\in S$,并且引理 3 的条件满足,此外:1)f 在 Γ 上是径向上半连续的;2)f 是 η-伪线性函数且满足条件 D;3)f^+ 关于第二分量是次奇的。则 $S=\hat{S}_6=\hat{S}_7=\hat{S}_8=\hat{S}_9$,其中

$$\hat{S}_6=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))=0;\forall i\in\tilde{I}(z), g_i^+(z;\eta(x,z))=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z), g_i(x)\leqslant 0\}$$

$$\hat{S}_7=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0;\forall i\in\tilde{I}(z),g_i^+(z;\eta(x,z))=0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z),g_i(x)\leqslant 0\}$$
$$\hat{S}_8=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))=0;\forall i\in\tilde{I}(z),g_i^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z),g_i(x)\leqslant 0\}$$
$$\hat{S}_9=\{x\in\Gamma:f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0;\forall i\in\tilde{I}(z),g_i^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0;\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z),g_i(x)\leqslant 0\}$$

证明 显然有 $\hat{S}_6\subseteq\hat{S}_7\subseteq\hat{S}_9$,$\hat{S}_6\subseteq\hat{S}_8\subseteq\hat{S}_9$。故只需证明 $S\subseteq\hat{S}_6$、$\hat{S}_9\subseteq S$ 即可。先证 $S\subseteq\hat{S}_6$,设 $\forall x\in S$,显然 x 是可行解,故 $\forall i\in\tilde{I}(z)$,$g_i(x)\leqslant 0=g_i(z)$。由引理 2,有

$$\forall i\in\tilde{I}(z),g_i^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0 \tag{5}$$

此外对 $\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z)$,$g_i(x)\leqslant 0$ 且 $f(x)=f(z)$。而 f 是关于 η 的预拟不变凸函数,由引理 2,于是

$$f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0 \tag{6}$$

因 z 是最优解,由引理 3,有 $f^+(z;\eta(x,z))+\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0$,其中 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\in\mathbf{R}^p$ 是最优解 z 对应的 Lagrange 乘子,由此式和(6)式有 $\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0$。而 $\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0\Leftrightarrow\sum_{i\in\tilde{I}(z)}\lambda_i g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0$,由此式可知 $\forall i\in\tilde{I}(z)$,$g_i^+(z;\eta(x,z))\geqslant 0$。结合(5)式,有 $\forall i\in\tilde{I}(z)$,$g_i^+(z;\eta(x,z))=0$。故 $x\in\hat{S}_6$。

然后证 $\hat{S}_9\subseteq S$,设 $\forall x\in\hat{S}_9$,则 $\forall i\in\tilde{I}(z)$,$g_i^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0$,故由 $g_i^+(\forall i\in\tilde{I}(z))$ 关于 η 的伪不变凹性,有 $\forall i\in\tilde{I}(z)$,$g_i(x)\leqslant g_i(z)=0$。结合 $\forall i\in I\backslash\tilde{I}(z)$,$g_i(x)\leqslant 0$:显然 x 是可行解。而 $f^+(z;\eta(x,z))\leqslant 0$,由 f^+ 关于 η 的伪不变凹性,$f(x)\leqslant f(z)$。而 $z\in S$,于是 $x\in S$。 证毕

参考文献:

[1] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterizations and applications of prequasi-Invex functions [J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 645-668.

[2] Zhao K Q, Tang L P. On characterizing solution set of non-differentiable η-pseudolinear extremum problem [J]. Optimization, 2012, 61(3): 239-249.

[3] Liu C P, Yang X M, Lee H W. Characterizations of the solution sets of pseudoinvex programs and variational inequalities [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2011(1): 32-44.

[4] Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis [M]. New York: John Wiley, 1983.

[5] Jeyakuma V. Strong and weak invexity in mathematical programming [J]. Math Method Oper Res, 1985, 55: 109-125.

[6] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions [J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[7] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterizaions and applications of prequasi-invex functions [J]. J Optim Theory Appl, 2003, 117: 607-625.

[8] Sach P H, Penot J P. Charaterizations of generalized convexities via generalized directional derivative [J]. Numer Funct Anal Optim, 1998, 19: 615-634.

[9] 王康,陈林. 一类非线性优化问题的性质探析[J]. 重庆科技学院学报:自然科学版, 2012, 14(4): 163-165.
Wang K, Chen L. Some properties for a class of nonlinear optimization problems [J]. Journal of Chongqing University of Science and Technology: Natural Sciere Edition, 2012, 14(4): 163-165.

[10] Mishra S R, Giorgi G. Invexity and optimization, nonconvex optimization and its applications [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

Operations Research and Cybernetics

Characterizations of the Solution Set for a Class of η-pseudolinear Programming

CHEN Lin, LONG Pu-jun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Convexity and the generalized convexity play a very important role in mathematical economic, engineering, management science and optimization theory. This paper is concerned with the properties and characterizations of solution sets for a class of nonlinear optimizations under the invexity and generalized invexity. In this paper, we focus on the characterizations of solution sets for η-pseudolinear programming by the Dini upper directional derivative and Lagrange multiplier. First, some properties are given for the nondifferentiable pseudolinear programming with constraints under the Dini upper directional derivative. And in certain conditions, the optimal solution set and feasible set is invex for such problems. Finally, some characterizations of the solution set are proved via the Dini upper directional derivative and Lagrange multiplier.

Key words: η-pseudolinear programming; Dini upper directional derivative; characterizations of the solution set; Lagrange multiplier

(责任编辑　黄　颖)