DOI:10.11721/cqnuj20130112

Banach 空间中间意义下的渐近 k -严格伪压缩映象不动点的迭代逼近*

毛巧莉, 向长合
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要 设 E 是实 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一致 L-Lipschitz 的中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象且 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$, 任取一点 $x_0\in E$,$\{x_n\}$是根据 $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_nT^nx_n+\beta_nu_n$ 定义的具误差的修改的 Mann 迭代序列,若 $F(T)$ 非空有界,在对参数的一些适当限制条件下,得到了 $\{x_n\}$强收敛于 T 的一个不动点的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf D(x_n,F(T))=0$;去掉 $F(T)$ 有界的条件后对参数进行同样的限制,得到了根据 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT^nx_n$ 定义的修改的 Mann 迭代序列$\{x_n\}$强收敛于 T 的一个不动点的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}\inf D(x_n,F(T))=0$。

关键词:Banach 空间;一致 L-Lipschitz 映象;中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象;不动点;Mann 迭代;误差
中图分类号:O177.91　　　　**文献标志码**:A　　　　**文章编号**:1672-6693(2013)01-0053-06

1972 年 Goebel 和 Kirk 在文献[1]中首次引入了渐近非扩张映象;为了扩大不动点理论的应用范围,1974 年 Kirk W. A. 在文献[2]中引入了渐近非扩张型映象;2004 年 Chang S. S. 等在文献[3]中引入了渐近拟非扩张型映象,并对其不动点的逼近问题进行了研究;在文献[3]的启发下,2005 年向长合在文献[4]中提出了广义渐近非扩张型映象和广义渐近拟非扩张型映象,并得到了其不动点迭代逼近的充要条件;2008 年胡国英[5]对文献[4]进行了改进,得到其主要结果在 Banach 空间的非空闭凸子集上仍然成立;2008 年 Kim T. H. 和 Xu H. K. 在文献[6]中提出了渐近 k-严格伪压缩映象和中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象,受文献[3-5]的启发,本文将在 Banach 空间的非空闭凸子集上研究中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象不动点的迭代逼近问题。

1 预备知识

设 E 是实 Banach 空间,其对偶空间为 E^*,$\langle *,*\rangle$是 E 与 E^* 之间的广义对偶对,映象 J 是从 E 到 2^{E^*} 的正规对偶映象[7],即 $J(x)=\{x^*\in E^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\},\forall x\in E$。

定义 1[8]　设 C 是 Banach 空间 E 中的非空凸子集,T 是从 C 到 C 的映象,则 T 的带误差的修改的 Mann 迭代序列$\{x_n\}$定义为 $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_nT^nx_n+\beta_nu_n$,其中 x_0 是 C 中给定一点,$\{u_n\}$是 C 中有界点列,$\{\alpha_n\}$和$\{\beta_n\}$都是$[0,1]$中的数列,并且满足 $\alpha_n+\beta_n\leqslant 1(\forall n\geqslant 0)$。特别地,若 $\beta_n=0$,则$\{x_n\}$称为 T 的修改的 Mann 迭代序列。

定义 2　设 E 是 Banach 空间,C 是 E 中的非空子集,T 是从 C 到 C 的映象,$F(T)$是 T 的所有不动点构成的集合,则

1) 称 T 是一致 L-Lipschitz 的[8],如果存在 $L\geqslant 1$,使得 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant L\|x-y\|,\forall n\geqslant 1,\forall x,y\in C$;

2) 称 T 是渐近非扩张型映象[2],如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|^2-\|x-y\|^2)\leqslant 0$;

3) 称 T 是渐近拟非扩张型映象[3],如果 $F(T)$非空且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sup\limits_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|^2-\|x-p\|^2)\leqslant 0$;

4) 称 T 是广义渐近非扩张型映象[4],如果存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|-k_n\|x-y\|)\leqslant 0$$

---

* 收稿日期:2012-01-09　　网络出版时间:2013-01-18 15:05
资助项目:国家自然科学基金(No. 11001289)
作者简介:毛巧莉,女,硕士研究生,研究方向为不动点理论及其应用,E-mail:bettyli_0201@yahoo.cn;通讯作者:向长合,E-mail:xch@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.53_011.html

5)称 T 是广义渐近拟非扩张型映象[4],如果 $F(T)$ 非空且存在 $\{k_n\}\subset[1,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{x\in C,p\in F(T)}(\|T^nx-p\|-k_n\|x-p\|)\leqslant 0$$

2004年Chang S. S.在文献[3]中对渐近拟非扩张型映象不动点的逼近问题进行了研究,得到如下结论:设 E 是Banach空间,$T:E\to E$ 是渐近拟非扩张型映象且满足如下条件:存在2个常数 $L>0$ 和 $\alpha>0$,使得 $\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|^{\alpha}$,$\forall x\in E$,$\forall p\in F(T)$。任取一点 $x_0\in E$,在对参数的一些适当限制条件下,得到了具混合误差的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 E 中一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

2005年向长合在文献[4]中引入了广义渐近拟非扩张型映象,将文献[3]中的主要结论进行了推广,并将条件"存在2个常数 $L>0$ 和 $\alpha>0$,使得 $\|Tx-p\|\leqslant L\|x-p\|^{\alpha}$,$\forall x\in E$,$\forall p\in F(T)$"用"$T$ 在 $F(T)$ 中的点处一致连续"这一较弱条件取代,得到了Banach空间上具混合误差的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于广义渐近拟非扩张型映象 T 的一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

2008年胡国英[5]对文献[4]进行了改进,设 C 是Banach空间 E 的非空闭凸子集,将广义渐近拟非扩张型映象 T 由"E 到 E"定义为"C 到 C",在不动点集有界的条件下对参数进行限制,得到了具误差的修改的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$;同时在去掉不动点集有界的条件后对参数进行同样的限制,得到了修改的Ishikawa迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中一个不动点的充要条件是 $\liminf\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

2008年,Kim T. H.和Xu H. K.在文献[6]中介绍了2类新的映象。

定义3[6] 设 H 是Hilbert空间,C 是 H 的非空子集,T 是从 C 到 C 的映象,则

1)称 T 是渐近 k-严格伪压缩映象,如果存在常数 $k\in[0,1)$ 和序列 $\{\gamma_n\}\subset[0,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$,使得 $\|T^nx-T^ny\|^2\leqslant(1+\gamma_n)\|x-y\|^2+k\|x-T^nx-(y-T^ny)\|^2$;

2)称 T 是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象,如果存在常数 $k\in[0,1)$ 和序列 $\{\gamma_n\}\subset[0,+\infty)$,$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\sup\limits_{x,y\in C}(\|T^nx-T^ny\|^2-(1+\gamma_n)\|x-y\|^2-k\|x-T^nx-(y-T^ny)\|^2)\leqslant 0$。

注1 定义3中的渐近 k-严格伪压缩映象和中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象均可以自然推广到Banach空间中。

注2 在一般情况下,渐近非扩张型映象、广义渐近非扩张型映象、渐近 k-严格伪压缩映象都是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象的特例。

本文的主要目的是研究Banach空间中非空闭凸子集上中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象不动点迭代逼近的充要条件,为此给出如下一些引理。

引理1[9] 若 E 是实Banach空间,则对任意给定的 $x,y\in E$,有 $\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle$,$\forall j(x+y)\in J(x+y)$。

引理2[10] 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是3个非负数列,满足 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}b_n<\infty$,$\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c_n<\infty$,$a_{n+1}\leqslant(1+b_n)a_n+c_n(n\geqslant n_0)$,其中 n_0 是某非负整数,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

引理3 设 E 是实Banach空间,C 是 E 的非空子集,$T:C\to C$ 是渐近 k-严格伪压缩映,若取 $L=\sup\left\{\dfrac{k+\sqrt{1+(1-k)\gamma_n}}{1-k}:n\in\mathbf{N}\right\}$,则 T 是一致 L-Lipschitz的。

证明 由于 T 是渐近 k-严格伪压缩映象,故对 $\forall x,y\in C$,有

$$\|T^nx-T^ny\|^2\leqslant(1+\gamma_n)\|x-y\|^2+k\|x-T^nx-(y-T^ny)\|^2=(1+\gamma_n)\|x-y\|^2+$$
$$k\|(x-y)+(T^ny-T^nx)\|^2\leqslant(1+\gamma_n)\|x-y\|^2+k\|T^ny-T^nx\|^2+2k\|T^nx-T^ny\|\cdot\|x-y\|+$$
$$k\|x-y\|^2=(1+k+\gamma_n)\|x-y\|^2+2k\|T^nx-T^ny\|\cdot\|x-y\|+k\|T^nx-T^ny\|^2$$

即
$$(1-k)\|T^nx-T^ny\|^2\leqslant(1+k+\gamma_n)\|x-y\|^2+2k\|T^nx-T^ny\|\cdot\|x-y\|$$

所以 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant\dfrac{1}{1-k}(k+\sqrt{1+(1-k)\gamma_n})\|x-y\|$,取 $L=\sup\left\{\dfrac{k+\sqrt{1+(1-k)\gamma_n}}{1-k}:n\in\mathbf{N}\right\}$,有 $\|T^nx-T^ny\|\leqslant L\|x-y\|$,则 T 是一致 L-Lipschitz的。 证毕

2 主要结论

定理 1　设 E 是 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸子集，$T:C\to C$ 是一致 L-Lipschitz 的中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象且 $F(T)$ 非空有界，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$。任取一点 $x_0\in C$，$\{x_n\}$ 是根据 $x_{n+1}=(1-\alpha_n-\beta_n)x_n+\alpha_nT^nx_n+\beta_nu_n$ 定义的具误差的修改的 Mann 迭代序列，其中 $\{u_n\}$ 是 C 中有界点列，$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列并且满足如下两个条件：1) $\alpha_n+\beta_n\leqslant 1$；2) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中一个不动点的充要条件是 $\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。

证明　必要性显然，下面证明充分性。设 $\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。首先证明极限 $\lim_{n\to\infty}D(x_n,F(T))$ 存在且等于零。任意给定 $\varepsilon>0$，由于 T 是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象，所以存在自然数 $N_0=N_0(\varepsilon)$，当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $\|T^nx-T^ny\|^2\leqslant(1+\gamma_n)\|x-y\|^2+k\|x-T^nx-(y-T^ny)\|^2+\varepsilon$，$\forall x,y\in C$。而 $F(T)$ 非空，故对 $\forall x\in C$，$\forall p\in F(T)$ 有

$$\|T^nx-p\|^2\leqslant(1+\gamma_n)\|x-p\|^2+k\|x-T^nx\|^2+\varepsilon \tag{1}$$

由 T 是一致 L-Lipschitz 的 $(L\geqslant 1)$，有

$$\|x_n-T^nx_n\|=\|x_n-p+p-T^nx_n\|\leqslant\|x_n-p\|+\|p-T^nx_n\|\leqslant(1+L)\|x_n-p\| \tag{2}$$

注意到 $\{u_n\}$ 是 C 中有界点列且 $F(T)$ 有界，不妨记 $M=\sup\{\|u_n-p\|:p\in F(T),n\geqslant 1\}$，则 $M<+\infty$。

当 $n\geqslant N_0$ 时，根据引理 1、(1) 式和 (2) 式，得

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-p\|^2=\|(1-\alpha_n-\beta_n)(x_n-p)+\alpha_n(T^nx_n-p)+\beta_n(u_n-p)\|^2\leqslant\\
&\|(1-\alpha_n-\beta_n)(x_n-p)+\alpha_n(T^nx_n-p)\|^2+2\langle\beta_n(u_n-p),j(x_{n+1}-p)\rangle\leqslant\\
&(1-\alpha_n-\beta_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)\|x_n-p\|\cdot\|T^nx_n-p\|+\alpha_n^2\|T^nx_n-p\|^2+\\
&2\beta_n\|u_n-p\|\cdot\|x_{n+1}-p\|\leqslant(1-\alpha_n-\beta_n)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1-\alpha_n-\beta_n)[\|x_n-p\|^2+\|T^nx_n-p\|^2]+\\
&\alpha_n^2\|T^nx_n-p\|^2+\beta_n\|u_n-p\|^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\\
&(1-\alpha_n-\beta_n)(1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1-\beta_n)\|T^nx_n-p\|^2+\beta_nM^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\\
&(1-\alpha_n-\beta_n)(1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_nM^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2+\\
&\alpha_n(1-\beta_n)[(1+\gamma_n)\|x_n-p\|^2+k\|x_n-T^nx_n\|^2+\varepsilon]=\\
&(1-\beta_n)(1-\beta_n+\alpha_n\gamma_n)\|x_n-p\|^2+\alpha_nk(1-\beta_n)\|x_n-T^nx_n\|^2+\alpha_n(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_nM^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\\
&(1-\beta_n)(1+\alpha_n\gamma_n)\|x_n-p\|^2+\alpha_nk(1-\beta_n)(1+L)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_nM^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2=\\
&(1-\beta_n)[1+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_nM^2+\beta_n\|x_{n+1}-p\|^2
\end{aligned}$$

所以　$(1-\beta_n)\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant(1-\beta_n)[1+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_nM^2$

则

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant[1+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\frac{\alpha_n(1-\beta_n)\varepsilon+\beta_nM^2}{1-\beta_n}=(1+b_n)\|x_n-p\|^2+c_n \tag{3}$$

其中 $b_n=[1+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]-1=\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2$，$c_n=\dfrac{\alpha_n\varepsilon(1-\beta_n)+\beta_nM^2}{1-\beta_n}$，由于 b_n、c_n 均与 p 无关，根据 (3) 式，有

$$D^2(x_{n+1},F(T))\leqslant(1+b_n)D^2(x_n,F(T))+c_n \tag{4}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$，故存在自然数 $N_1\geqslant N_0$，当 $n\geqslant N_1$ 时，$\beta_n\leqslant\frac{1}{2}$，则 $0\leqslant c_n\leqslant 2[\alpha_n\varepsilon(1-\beta_n)+\beta_nM^2]$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$、$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n<\infty$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$。根据引理 2 和 (4) 式知 $\lim_{n\to\infty}D^2(x_n,F(T))$ 存在，所以极限 $\lim_{n\to\infty}D(x_n,F(T))$ 存在。再结合假设 $\liminf_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$ 得

$$\lim_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0 \tag{5}$$

然后证明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列。由 (5) 式知，存在自然数 N_2，当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $D(x_n,F(T))<\varepsilon$，从而存在 $p_n\in F(T)$，使得

$$\| x_n - p_n \| < \varepsilon \tag{6}$$

由(3)式,当 $n \geqslant N_1$ 且 $n \geqslant N_2$ 时,有 $\| x_{n+m} - p_n \|^2 \leqslant (1 + b_{n+m-1}) \| x_{n+m-1} - p_n \|^2 + c_{n+m-1}, \forall m \geqslant 1$,则有

$$(\| x_{n+m} - x_n \| - \| p_n - x_n \|)^2 = (\| x_{n+m} - p_n + p_n - x_n \| - \| p_n - x_n \|)^2 \leqslant \| x_{n+m} - p_n \|^2 \leqslant$$
$$(1 + b_{n+m-1}) \| x_{n+m-1} - p_n \|^2 + c_{n+m-1} \leqslant (1 + b_{n+m-1}) [(1 + b_{n+m-2}) \| x_{n+m-2} - p_n \|^2 + c_{n+m-2}] + c_{n+m-1} \leqslant \cdots \leqslant$$
$$(1 + b_{n+m-1}) \cdots (1 + b_n) \| x_n - p_n \|^2 + (1 + b_{n+m-1}) \cdots (1 + b_{n+1}) c_n + \cdots + c_{n+m-1} =$$
$$\exp\left(\sum_{k=n}^{n+m-1} b_k\right) \left[\| x_n - p_n \|^2 + \sum_{k=n}^{n+m-1} c_k \right] \leqslant \exp\left(\sum_{k=n}^{\infty} b_k\right) \left[\| x_n - p_n \|^2 + \sum_{k=n}^{\infty} c_k \right] \tag{7}$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$,故存在自然数 N_3,当 $n \geqslant N_3$ 时,有

$$\sum_{k=n}^{\infty} c_k < \varepsilon^2, \quad \sum_{k=n}^{\infty} b_k < \ln 2 \tag{8}$$

因此,取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$,当 $n \geqslant N$ 且 $m \geqslant 1$ 时,由(6)~(8)式,有 $(\| x_{n+m} - x_n \| - \| p_n - x_n \|)^2 \leqslant 2(\varepsilon^2 + \varepsilon^2) = 4\varepsilon^2$,所以,当 $n \geqslant N$ 且 $m \geqslant 1$ 时,有 $\| x_{n+m} - x_n \| \leqslant \| p_n - x_n \| + 2\varepsilon \leqslant 3\varepsilon$,这说明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列,必强收敛于 C 中一点 x^*。

最后证明 $x^* \in F(T)$。由于 $|D(x_n, F(T)) - D(x^*, F(T))| \leqslant \| x_n - x^* \|$,由此式及(5)式得 $D(x^*, F(T)) = \lim_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$。因为 T 是一致 L-Lipschitz 的($L \geqslant 1$),所以 $F(T)$ 是 C 中的闭子集,从而 $x^* \in F(T)$,即 $\{x_n\}$ 强收敛于 $F(T)$ 中一点 x^*。 证毕

推论 1 设 E 是实 Banach 空间,C 是 E 中的非空闭凸子集,$T: C \to C$ 是渐近 k-严格伪压缩映象且满足 $F(T)$ 非空有界,$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$。任取一点 $x_0 \in C$,$\{x_n\}$ 是根据 $x_{n+1} = (1 - \alpha_n - \beta_n) x_n + \alpha_n T^n x_n + \beta_n u_n$ 定义的具误差的修改的 Mann 迭代序列,其中 $\{u_n\}$ 是 C 中有界点列,$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列且满足如下两个条件:1) $\alpha_n + \beta_n \leqslant 1$;2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$,$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中一个不动点的充要条件是 $\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$。

根据定理 1 和引理 3 即可证得推论 1。

注 3 由于渐近非扩张型映象、广义渐近非扩张型映象都是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象的特例,故对这 2 种映象也有定理 1 中相应的结论成立。

注 4 定理 1 中要求 $F(T)$ 是有界的,这一条件较强,为去掉 $F(T)$ 有界这一条件,接下来讨论 Banach 空间中非空闭凸子集上不带误差的修改的 Mann 迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象 T 的不动点的充要条件。

定理 2 设 E 是 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T: C \to C$ 是一致 L-Lipschitz 的中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象且 $F(T)$ 非空,$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$。任取一点 $x_0 \in C$,$\{x_n\}$ 是根据 $x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T^n x_n$ ($n \in \mathbf{N}$) 定义的修改的 Mann 迭代序列,其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列且 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中的一个不动点的充要条件是 $\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$。

证明 必要性显然,下面证明充分性。设 $\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$,首先证明极限 $\lim_{n\to\infty} D(x_n, F(T))$ 存在且等于零。任意给定 $\varepsilon > 0$,由于 T 是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象,所以存在自然数 $N_0 = N_0(\varepsilon)$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有 $\| T^n x - T^n y \|^2 \leqslant (1 + \gamma_n) \| x - y \|^2 + k \| x - T^n x - (y - T^n y) \|^2 + \varepsilon$,$\forall x, y \in C$。由于 $F(T)$ 非空,故对 $\forall x \in C$,$\forall p \in F(T)$ 有

$$\| T^n x - p \|^2 \leqslant (1 + \gamma_n) \| x - p \|^2 + k \| x - T^n x \|^2 + \varepsilon \tag{9}$$

由 T 是一致 L-Lipschitz 的($L \geqslant 1$),有

$$\| x_n - T^n x_n \| = \| x_n - p + p - T^n x_n \| \leqslant \| x_n - p \| + \| p - T^n x_n \| \leqslant (1 + L) \| x_n - p \| \tag{10}$$

当 $n \geqslant N_0$ 时,根据引理 1、(9)、(10)式和不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$,有

$$\| x_{n+1} - p \|^2 = \| (1 - \alpha_n)(x_n - p) + \alpha_n (T^n x_n - p) \| \leqslant (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - p \|^2 +$$
$$2\langle \alpha_n (T^n x_n - p), j(x_{n+1} - p) \rangle \leqslant (1 - \alpha_n)^2 \| x_n - p \|^2 + 2\alpha_n \| T^n x_n - p \| \cdot \| x_{n+1} - p \| \leqslant$$

$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n\|T^nx_n-p\|^2+\alpha_n\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n[(1+\gamma_n)\|x_n-p\|^2+k\|x_n-T^nx_n\|^2+\varepsilon]+\alpha_n\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant$$
$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n(1+\gamma_n)\|x_n-p\|^2+\alpha_nk(1+L)^2\|x_n-p\|^2+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n\|x_{n+1}-p\|^2=$$
$$[(1-\alpha_n)^2+\alpha_n(1+\gamma_n)+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n\|x_{n+1}-p\|^2=$$
$$[1-\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\alpha_n\varepsilon+\alpha_n\|x_{n+1}-p\|^2$$

所以
$$(1-\alpha_n)\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant[1-\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2]\|x_n-p\|^2+\alpha_n\varepsilon$$
则
$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\frac{1-\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2}{1-\alpha_n}\|x_n-p\|^2+\frac{\alpha_n\varepsilon}{1-\alpha_n}=(1+b_n)\|x_n-p\|^2+c_n \tag{11}$$

其中 $b_n=\dfrac{1-\alpha_n+\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2}{1-\alpha_n}-1=\dfrac{\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2}{1-\alpha_n}$，$c_n=\dfrac{\alpha_n\varepsilon}{1-\alpha_n}$，注意到 b_n 和 c_n 均与点 p 无关，当 $n\geqslant N_0$ 时，$D^2(x_{n+1},F(T))\leqslant(1+b_n)D^2(x_n,F(T))+c_n$。由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$，有 $\alpha_n\to0$，所以存在自然数 $N_1\geqslant N_0$，当 $n\geqslant N_1$ 时，$\alpha_n<\dfrac{1}{2}$，故当 $n\geqslant N_1$ 时，$0\leqslant b_n\leqslant2(\alpha_n^2+\alpha_n\gamma_n+\alpha_nk(1+L)^2)$，$0\leqslant c_n\leqslant2\alpha_n\varepsilon$。由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$，得 $\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}b_n<\infty$，$\sum\limits_{n=N_1}^{\infty}c_n<\infty$。根据引理 2 知 $\lim\limits_{n\to\infty}D^2(x_n,F(T))$ 存在，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))$ 存在。再结合假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf D(x_n,F(T))=0$ 得
$$\lim_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0 \tag{12}$$

然后证明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列。由(12)式知，存在自然数 N_2，当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $D(x_n,F(T))<\varepsilon$，从而存在 $p_n\in F(T)$，使得
$$\|x_n-p_n\|<\varepsilon \tag{13}$$
由(11)式，当 $n\geqslant N_1$ 且 $n\geqslant N_2$ 时，有 $\|x_{n+m}-p_n\|^2\leqslant(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|^2+c_{n+m-1}$，$\forall m\geqslant1$。则有
$$(\|x_{n+m}-x_n\|-\|p_n-x_n\|)^2=(\|x_{n+m}-p_n+p_n-x_n\|-\|p_n-x_n\|)^2\leqslant\|x_{n+m}-p_n\|^2\leqslant$$
$$(1+b_{n+m-1})\|x_{n+m-1}-p_n\|^2+c_{n+m-1}\leqslant(1+b_{n+m-1})[(1+b_{n+m-2})\|x_{n+m-2}-p_n\|^2+c_{n+m-2}]+c_{n+m-1}\leqslant\cdots\leqslant$$
$$(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_n)\|x_n-p_n\|^2+(1+b_{n+m-1})\cdots(1+b_{n+1})c_n+\cdots+c_{n+m-1}=$$
$$\exp\left(\sum_{k=n}^{n+m-1}b_k\right)\left[\|x_n-p_n\|^2+\sum_{k=n}^{n+m-1}c_k\right]\leqslant\exp\left(\sum_{k=n}^{\infty}b_k\right)\left[\|x_n-p_n\|^2+\sum_{k=n}^{\infty}c_k\right] \tag{14}$$
由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$，故存在自然数 N_3，当 $n\geqslant N_3$ 时，有
$$\sum_{k=n}^{\infty}c_k<\varepsilon^2,\quad\sum_{k=n}^{\infty}b_k<\ln2 \tag{15}$$
因此，取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，当 $n\geqslant N$ 且 $m\geqslant1$ 时，由(13)～(15)式，有 $(\|x_{n+m}-x_n\|-\|p_n-x_n\|)^2\leqslant2(\varepsilon^2+\varepsilon^2)=4\varepsilon^2$。所以，当 $n\geqslant N$ 且 $m\geqslant1$ 时，有 $\|x_{n+m}-x_n\|\leqslant\|p_n-x_n\|+2\varepsilon\leqslant3\varepsilon$。这说明 $\{x_n\}$ 是 C 中的 Cauchy 点列，必强收敛于 C 中一点 x^*。

最后证明 $x^*\in F(T)$。由于 $|D(x_n,F(T))-D(x^*,F(T))|\leqslant\|x_n-x^*\|$，由此式及(12)式得 $D(x^*,F(T))=\lim\limits_{n\to\infty}D(x_n,F(T))=0$。因为 T 是一致 L-Lipschitz 的，所以 $F(T)$ 是 C 中的闭子集，从而 $x^*\in F(T)$，即 $\{x_n\}$ 强收敛于 $F(T)$ 中一点 x^*。　　证毕

推论 2　设 E 是 Banach 空间，C 是 E 的非空闭凸集，$T:C\to C$ 是渐近 k-严格伪压缩映象且 $F(T)$ 非空，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$。$\forall x_0\in C$，$\{x_n\}$ 是根据 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nT^nx_n$ 定义的修改的 Mann 迭代序列得到的，其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$。则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 在 C 中的一个不动点的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf D(x_n,F(T))=0$。

由定理 2 和引理 3 即可证得推论 2。

注 5　由于渐近非扩张型映象、广义渐近非扩张型映象都是中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象的特例，故

对这 2 种映象也有定理 2 中相应的结论成立。

注 6 若去掉不动点集 $F(T)$ 有界的假设，在对参数的一些适当限制条件下，$\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$ 是否仍然是带误差的修改的 Mann 迭代序列强收敛于中间意义下的渐近 k-严格伪压缩映象的一个不动点的充要条件呢？这个问题有待作进一步探讨。

参考文献：

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35(1): 171-174.

[2] Kirk W A. Fixed point theorems non-Lipschitzian mappings of asymptotically nonexpansive type[J]. Israel J Math, 1974, 17: 339-346.

[3] Chang S S, Kim J K, Kang S M. Approximating fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive type mappings by the Ishikawa iterative sequences with mixed errors[J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13: 179-186.

[4] 向长合. Banach 空间上广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版, 2005, 22(4): 1-4.
Xiang C H. Approximation of fixed points of generalized asymptotic qusi-nonexpansive type mapping [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2005, 22(4): 1-4.

[5] 胡国英, 梁天娟. 广义渐近拟非扩张型映象不动点的逼近[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版, 2008, 25(1): 10-13.
Hu G Y, Liang T J. Approximation of fixed points of a generalized asymptotically quasi-nonexpansive type mapping [J]. Journal of Chongqing Normal Vniversity: Natural Science, 2008, 25(1): 10-13.

[6] Kim T H, Xu H K. Congvergence of the modified Mann's iteration method for asymptotically strict pseudocontractions[J]. Nonlinear Anal, 2008, 61: 2828-2836.

[7] Asplund E. Positivity of duality mappings[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 200-203.

[8] Chang S S. Some results for asymptotically pseudocontractive mappings and asymptotically non-expansive mappings [J]. Proc Amer Math Soc, 2001, 129(3): 845-853.

[9] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, 30(7): 4197-4208.

[10] Zhou Y Y, Chang S S. Congvergence of implicit iterative process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002, 23: 911-921.

Approximation of Fixed Points of Asymptotically k-strict Pseudocontractive Mapping in the Intermediate Sense in Banach Space

MAO Qiao-li, XIANG Chang-he

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Let E be a real Banach space and C be a nonempty closed convex subset of E. $T: C \to C$ is a uniformly L-Lipschitz asymptotically k-strict pseudocontractive mapping in the intermediate sense and $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$. Let $x_0 \in E$ be any given point, $\{x_n\}$ is the modified Mann iterative sequence with errors defined by $x_{n+1} = (1-\alpha_n-\beta_n) x_n + \alpha_n T^n x_n + \beta_n u_n$. If $F(T)$ is nonempty and bounded, under some appropriate restricted conditions, a necessary and sufficient condition for $\{x_n\}$ converges strongly to a fixed point of T is $\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$. After removing the condition that $F(T)$ is bounded, under the same restricted conditions on the parameters, the modified Mann iterative sequence $\{x_n\}$ defined by $x_{n+1} = (1-\alpha_n) x_n + \alpha_n T^n x_n$ converges strongly to a fixed point of T if and only if $\liminf_{n\to\infty} D(x_n, F(T)) = 0$.

Key words: Banach space; uniformly L-Lipschitz mapping; asymptotically k-strict pseudocontractive mapping in the intermediate sense; fixed point; Mann iterative sequence; error

(责任编辑 黄 颖)