DOI:10.11721/cqnuj20130113

带有负顾客和 N-策略的 Geo/Geo/1 工作休假排队*

郭宏侠,徐秀丽,耿 杰
(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

摘要:在离散时间 Geo/Geo/1 多重工作休假排队模型的基础上,加入了负顾客和 N 策略。这是一个新的模型,改进了已有的相关结论。工作休假是指在休假期间,服务员不是完全停止服务,而是低速率继续为顾客服务。这既可减少顾客因为不耐烦排队离开后所造成的损失,也可提高经济效益。在文中的负顾客不接受服务,并只起一对一抵消队首正接受服务的顾客的作用,即服从 RCH(Remove customer from head)策略。通过嵌入马尔可夫链方法,得到转移概率矩阵。并使用拟生灭过程及矩阵几何解方法得到队长的稳态分布:$\pi_{kj}=p(L=k,J=j),(k,j)\in\Omega$,进一步得出了系统队长的随机分解的结果:$L^N(z)=L_0(z)L_d(z)$。

关键词:工作休假;N 策略;矩阵几何解;条件随机分解
中图分类号:O226 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2013)01-0059-04

在以往的 20 年里,休假排队已得到广泛发展,在很多领域中都有应用,如通信网络、计算机系统等,详见 Tian 和 Zhang[1] 的著作。近年来,Servi 和 Finn[2] 引入一种半休假策略。Baba[3] 用矩阵几何解方法分析了工作休假 GI/M/1 排队模型。随之,国内外的很多学者对工作休假排队进行了广泛研究。

从 Meisling[4] 提出离散时间排队系统之后,离散时间排队系统的理论得到一定的发展。此外,带有 N 策略的排队模型也随之得到研究,如 Kella[5] 详细讨论了 N 策略 M/G/1 排队系统模型。事实上,计算机等领域更倾向于使用离散时间排队建模,国内外很多学者对此进行了研究。正顾客进入系统排队且可接受服务,负顾客看成是某些工作的外来援助或是取消信号,负顾客只起抵消正顾客的作用,不接受服务。排队论的实用性很大[6]。

最近,田乃硕[7]、朱桂仙[8] 等分析了离散时间 Geo/Geo/1 工作休假排队,朱翼隽[9] 研究了带有负顾客的 Geo/Geo/1 多重工作休假排队。本文是在其基础上,加入了 RCH 负顾客。

1 模型描述和稳态条件

对任意的实数 $x\in[0,1]$,定义 $\bar{x}=1-x$。考虑带有 RCH 负顾客和 N-策略的 Geo/Geo/1 多重工作休假排队的模型,描述如下:

1)单个正、负顾客的到达均发生在时隙的末端 (n^-,n) 处,到达间隔分别记为 T^+ 和 T^-,独立同分布,其分布为

$P(T^+=k)=p\bar{p}^{k-1},k\geqslant 1,0<p<1$; $P(T^-=k)=p^*\overline{p^*}^{k-1},k\geqslant 1,0<p^*<1$。

2)顾客服务的开始以及结束都发生于时隙分点 $t=n$ 处,在正规忙期内,顾客的服务时间 S_b 服从参数 μ_b 的几何分布:$P(S_b=k)=u_b\overline{u_b}^{k-1}$, $k\geqslant 1,0<u_b<1$。

3)在工作休假期间,顾客的服务时间 S_v 服从 μ_v 的几何分布

$$P(S_v=k)=u_v\overline{u_v}^{k-1},k\geqslant 1,0<u_v<1$$

4)当一个正规忙期结束时,系统则进入一个工作休假 V,其分布为

$$P(V=k)=\theta\bar{\theta}^{k-1},k\geqslant 1,0<\theta<1$$

5)假设休假的开始以及结束都发生在时刻 (n^-,n) 上,若一次工作休假结束的时候,系统中的顾客数大于或者等于 N(事先规定),那么一个正规忙期就会开始,服务率从 μ_v 转变为 μ_b,在此刻接受服务的顾客需重新接受服务;否则,进入另一次工作休假。

6)到达间隔 T^+,T^-,服务时间 S_b,S_v 以及休假时间均相互独立,服务规则是先到先服务。根据文献[5],本文讨论的是晚到且有延迟入口的离散时间排队的模型。

设 L_n 表示 n^+ 处系统中的顾客数,在时隙 (n,n^+) 服务完成的顾客将不计入 L_n,记 $J_n=$

* 收稿日期:2012-04-20 网络出版时间:2013-01-18 15:05
资助项目:国家自然科学基金(No. 71071134)
作者简介:郭宏侠,硕士研究生,研究方向为排队论及其应用,E-mail:guohongxia@126.com;通讯作者:徐秀丽,E-mail:xuxl@ysu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130118.1505.201301.59_012.html

$\begin{cases}0,\text{时刻 } n^+ \text{系统处在休假状态}\\ 1,\text{时刻 } n^+ \text{系统处在正规忙期}\end{cases}$,则 $\{(L_n,J_n),n\geqslant 0\}$ 是一马尔可夫链,状态空间为 $\Omega=\{(0,0)\}\cup\{(k,j),k\geqslant 1,j=0,1\}$。

对状态进行字典序排列,状态转移概率矩阵可写成如下分块形式

$$\tilde{\boldsymbol{p}}=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\\square\\N-1\\N\\N+1\\\square\end{array}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{00}&\boldsymbol{A}_{01}&&&&&&&&\\\boldsymbol{A}_{10}&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&&&&&\\&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&&&&\\&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&&&\\&&&\square&\square&\square&&&&\\&&&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&\\&&&&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}_0&&\\&&&&&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}_0&\\&&&&&&&\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{00}=1-p$,$\boldsymbol{A}_{01}=(p,0)$,$\boldsymbol{A}_{10}=[\bar{P}\,\bar{P}^*u_v+\bar{p}p^*,$

$\bar{p}\,\bar{p}^*u_b+\bar{p}p^*]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}P\,\bar{P}^*\overline{u_v}&0\\0&P\,\bar{P}^*\overline{u_b}\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*&0\\0&\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_b}+p\,\bar{p}^*u_b+pp^*\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_v&0\\0&\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_b\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}=$

$\begin{bmatrix}(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\bar{\theta}&(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta\\0&\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_b}+p\,\bar{p}^*u_b+pp^*\end{bmatrix}$。

此模型中矩阵二次方程 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_0$ 的最小非负解 $\boldsymbol{R}$ 称作率阵。为表示 $\boldsymbol{R}$,记 $\alpha=\dfrac{p\,\bar{p}^*\overline{u_b}}{\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_b}$,得到下述定理。

定理 1 若 $\alpha<1$,矩阵方程 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_0$ 有最小的非负解

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r&\dfrac{(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta r}{(\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_b)(1-r)}\\0&\alpha\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中 $$r=\frac{1-(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\bar{\theta}}{2(\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_v)}-\frac{\sqrt{[(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\bar{\theta}-1]^2-4p\,\bar{p}^*\overline{u_v}(\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_v)}}{2(\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_v)}$$

证明 因为 A_i 都是上三角矩阵,那么 $\boldsymbol{R}$ 也是上三角矩阵,设 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}\\0&r_{22}\end{bmatrix}$,由方程 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_0$ 得 $r_{11}=r$,$r_{22}=\dfrac{p\,\bar{p}^*\overline{u_b}}{\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_b}=\alpha$,$r_{12}=\dfrac{(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta r}{(\bar{p}p^*+\bar{p}\,\bar{p}^*u_b)(1-r)}$。 证毕

定理 2 马尔可夫链 $\{(L_n,J_n),n\geqslant 0\}$ 是正常返,当且仅当 $\alpha<1$。

证明 MC 正常返,只有当率阵 $\boldsymbol{R}$ 的谱半径 $SP(\boldsymbol{R})<1$ 且矩阵方程 $(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})B[\boldsymbol{R}]=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$ 有正解时。这里

$$B[\boldsymbol{R}]=\begin{array}{c}0\\1\\2\\\square\\N-2\\N-1\end{array}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{00}&\boldsymbol{A}_{01}&&&&&\\\boldsymbol{A}_{10}&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&&\\&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0&&&\\&&&\square&\square&\square&\\&&&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{A}_0\\&&&&&\boldsymbol{A}_2&\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}$$

容易证得 $B[\boldsymbol{R}]$ 为随机阵,这就使得 $(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})B[\boldsymbol{R}]=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$ 有正解,可以取 $(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$ 为 $B[\boldsymbol{R}]$ 的平稳概率向量。由 $r<1$,$sp(\boldsymbol{R})=\max(r,\alpha)$,可证得当且仅当 $\alpha<1$ 时,$sp(\boldsymbol{R})<1$。

2 队长的稳态分布

当 $\alpha<1$ 时,设 (L,J) 是 $\{(L_n,J_n),n\geqslant 0\}$ 的稳态极限,(L,J) 的分布可记为 $\pi_{kj}=\lim\limits_{n\to\infty}P\{Q_n=k,J_n=j\}=P\{Q=k,J=j\}$,$(k,j)\in\Omega$,$\pi_k=(\pi_{k0},\pi_{k1})$。

定理 3 当 $\alpha<1$ 时,(L,J) 的联合概率分布为

$$\begin{cases}\pi_{00}=\bar{p}^*\overline{u_v}\left[1+(1-r)\dfrac{\eta(1-\eta^{N-1})}{1-\eta}\right]H\\ \pi_{N-j,0}=\left[1+(1-r)\dfrac{\eta(1-\eta^{j-1})}{1-\eta}\right]H,1\leqslant j\leqslant N-1\\ \pi_{j1}=\dfrac{1-\alpha^j}{1-\alpha}KH,1\leqslant j\leqslant N-1\\ \pi_{k0}=r^{k-N+1}H,k\geqslant N-1\\ \pi_{k1}=\left[\dfrac{\alpha^{k-N+1}-r^{k-N+1}}{\alpha-r}\times\dfrac{(\bar{p}\,\bar{p}^*\overline{u_v}+p\,\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta r}{(\bar{p}p^*+\overline{pp}^*u_b)(1-r)}+\right.\\ \qquad\left.\dfrac{\alpha^k(\alpha^{-N+1}-1)}{1-\alpha}K\right]H,\qquad k\geqslant N-1\end{cases}$$

其中 $\eta=\dfrac{\bar{p}p^*+\bar{p}\,\overline{p^*u_v}}{p\,\bar{p}^*\overline{u_v}}$,$K=\dfrac{\alpha\overline{u_v}}{\overline{u_b}}(1-\eta r)$,

$$H=\left\{H=\bar{p}^{*}\overline{u_v}+\frac{\eta(1-r)}{1-\eta}\left[\bar{p}^{*}\bar{\mu}_v(1-\eta^{N-1})+N-2-\frac{\eta(1-\eta^{N-2})}{1-\eta}\right]+N-2+\frac{K(N-1)}{1-\alpha}+\frac{1}{1-r}\left[1+\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)(1-\alpha)}\right]\right\}^{-1}$$

证明　由$(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})B[\boldsymbol{R}]=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{N-1})$,得出

$$\begin{cases}p\pi_{00}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*})\pi_{10}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})\pi_{11}=0 & (2)\\ (\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*}+p\bar{p}^{*}\overline{u_v})\pi_{10}-p\pi_{00}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*})\pi_{20}=0 & (3)\\ (\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*}+p\bar{p}^{*}\overline{u_b})\pi_{11}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})\pi_{21}=0 & (4)\\ (\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*}+p\bar{p}^{*}\overline{u_v})\pi_{j0}-p\bar{p}^{*}\overline{u_v}\pi_{j-1,0}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*})\pi_{j+1,0}=0,2\leqslant j\leqslant N-2 & (5)\\ (\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*}+p\bar{p}^{*}\overline{u_b})\pi_{j1}-p\bar{p}^{*}\overline{u_b}\pi_{j-1,1}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})\pi_{j+1,1}=0,2\leqslant j\leqslant N-2 & (6)\\ [(\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*})(1-r)+p\bar{p}^{*}\overline{u_v})]\pi_{N-1,0}-p\bar{p}^{*}\overline{u_v}\pi_{N-2,0}=0 & (7)\\ (\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})\pi_{N-1,1}-[(p\bar{p}^{*}\overline{u_v}-(\bar{p}\bar{p}^{*}u_v+\bar{p}p^{*})r]\pi_{N-1,0}-p\bar{p}^{*}\overline{u_b}\pi_{N-2,1}=0 & (8)\end{cases}$$

把 $\pi_{N-1,0}$作为常数,由(5)式可得

$$\pi_{N-j,0}=\left[1+(1-r)\frac{\eta(1-\eta^{j-1})}{1-\eta}\right]\pi_{N-1,0},1\leqslant j\leqslant N-1$$

通过此式可求得 π_{10},π_{20},把 π_{10},π_{20}代入(3)式得 $\pi_{00}=\bar{p}^{*}\overline{u_v}\left[1+(1-r)\frac{\eta(1-\eta^{N-1})}{1-\eta}\right]\pi_{N-1,0}$。

由(2)式和(3)式得 $\pi_{11}=\frac{\alpha\overline{u_v}}{\overline{u_b}}(1-\eta r)\times\pi_{N-1,0}=K\pi_{N-1,0}$代入(6)式得到 $\pi_{j1}=\frac{1-\alpha^{j}}{1-\alpha}\pi_{11}$,根据正规化条件 $\sum_{k=0}^{N-2}\pi_k\mathrm{e}+\pi_{N-1}(I-R)^{-1}\mathrm{e}=1$,可求得 $\pi_{N-1,0}$,$\pi_k=\pi_{N-1}R^{k-N+1}=(\pi_{N-1,0},\pi_{N-1,1})R^{k-N+1}$,$k\geqslant N-1$,可求得 $\pi_{k0}\pi_{k1}$。　证毕

3 队长的条件随机分解结构

为了得出此排队模型的条件随机分解的结构,$L^{(N)}=\{L-N\mid L\geqslant N,J=1\}$,$L^{(N)}$表示系统处在正规忙期间,顾客数不少于 N 的条件随机变量。

定理 4　当 $\alpha<1$ 时,$L^{(N)}$可分解为两个随机变量的和 :$L^{(N)}=L_0+L_d$,L_0 是经典无休假 Geo/Geo/1 排队中的稳态顾客数,且服从参数 $1-\alpha$ 的几何分布,附加队长 L_d 有分布函数

$$p(L_d=k)=\begin{cases}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\alpha^{N-1})K+\frac{1}{1-\alpha}\frac{(\bar{P}\bar{P}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{P}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}\right],k=0\\ \frac{1}{\rho}\frac{1}{1-\alpha}\frac{(\bar{P}\bar{P}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{P}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}r^{k},k\geqslant 1\end{cases}$$

这里

$$\rho=\frac{1}{(1-\alpha)(1-r)}\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}+\frac{\alpha(1-\alpha^{N-1})}{(1-\alpha)^2}K$$

证明　系统处在忙期时,顾客数不少于 N 的概率为

$$P(L\geqslant N,J=1)=\sum_{k=N}^{\infty}\pi_{k1}=\left[\frac{1}{(1-\alpha)(1-r)}\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})(1-r)}+\frac{\alpha(1-\alpha^{N-1})}{(1-\alpha)^2}K\right]H=\rho H$$

$$p(L^{(N)}=k)=p(L-N=k\mid L\geqslant N,J=1)=\frac{\pi_{N+k,1}}{P(L\geqslant N,J=1)}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\alpha^{k+1}-r^{k+1}}{\alpha-r}\times\frac{(\bar{P}\bar{P}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}\bar{p}^{*}u_b+\bar{p}p^{*})(1-r)}+\frac{\alpha^{N+k}(\alpha^{-N+1}-1)}{1-\alpha}K\right]$$

$L^{(N)}$的母函数为

$$L^{(N)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}p(L^{(N)}=k)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{(1-z\alpha)(1-zr)}\times\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}+\frac{\alpha(1-\alpha^{N-1})}{(1-z\alpha)(1-\alpha)}K\right]=$$

$$\frac{1-\alpha}{1-z\alpha}\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{(1-\alpha)(1-zr)}\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\alpha^{N-1})K\right]=L_0(z)L_d(z)$$

L_d 的母函数为

$$L_d(z)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{(1-\alpha)(1-zr)}\times\frac{(\bar{p}\bar{p}^{*}\overline{u_v}+p\bar{p}^{*}u_v+pp^{*})\theta r}{(\bar{p}p^{*}+\bar{p}\bar{p}^{*}u_b)(1-r)}+\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}(1-\alpha^{N-1})K\right]$$

把此式展开成 z 的幂级数就可得到附加队长 L_d 的分

布。通过定理 4,得出均值公式

$$E(L_0)=\frac{\alpha}{1-\alpha},E(L_d)=\frac{1}{\rho}\frac{1}{1-\alpha}\times\frac{(\bar{p}\bar{p}^*\bar{u}_v+p\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta r}{(\bar{p}p^*+\bar{p}\bar{p}^*u_b)(1-r)}\frac{r}{(1-r)^2}$$

$$E(L^N)=E(L_0)+E(L_d)=\frac{\alpha}{1-\alpha}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{1-\alpha}\times\frac{(\bar{p}\bar{p}^*\bar{u}_v+p\bar{p}^*u_v+pp^*)\theta r^2}{(\bar{p}p^*+\bar{p}\bar{p}^*u_b)(1-r)^3}$$

证毕

本文通过研究带有 RCH 负顾客和 N-策略的 Geo/Geo/1 工作休假排队,得到系统的稳态分布,进而求得了系统队长。在此文中,如果 $N=0,P^*=0$,就可得到 Geo/Geo/1 多重工作休假排队模型,本文研究拓展了文献[5]中模型已有的结果。

参考文献:

[1] Tian N,Zhang Z G. Analysis of the M/G/1 queue with exponentially working vacations a matrix analytic approach[J]. Queueing Systems,2009,61(2):139-166.

[2] Servi L,Finn S. M/M/1 queue with working Vacations (M/M/1/WV)[J]. Performance Evaluation,2002,50(1):41-52.

[3] Baba Y. Analysis of a GI/M/1 queue with multiple working vacations[J]. Operat Res Letters,2005,33(2):201-209.

[4] Meisling T. Discrete time queuing theory[J]. Oper Res,1958,36(1):96-105.

[5] Kella O. The threshold policy in the M/G/1 queue with vacations[J]. Naval Research Logistics,1989,36(1):111-123.

[6] 叶宗文. M/M/C 排队模型在理发服务行业中的应用[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2009,26(2):75-78.

Ye Z W. The application of M/M/C queuing M/M/C model in the barber service industries[J]. The Journal of Chongqing Normal University:Natural Science Edition,2009,26(2):75-78.

[7] 唐学德,朱翼隽,冯艳刚. 具有两种服务的负顾客 M~ζ/(G_1/G_2)/1 排队系统[J]. 江西师范大学学报:自然科学版,2007,31(5):500-503.

Tang X D,Zhu Y J,Feng Y G. M~ζ/(G_1/G_2)/1 Queueing system with negative customers and two phase service[J]. Journal of Jiangxi Normal University:Natural Sciences Edition,2007,31(5):500-503.

[8] 田乃硕,徐秀丽,马占友. 离散时间排队论[M]. 北京:科学出版社,2008:169-188.

Tian N S,Xu X L,Ma Z Y. Discrete time queueing theory[M]. Beijing:Science Press,2008:169-188.

[9] 朱桂仙,徐德举. N 策略多重工作休假 Geo/Geo/1 离散时间排队[J]. 首都师范大学学报:自然科学版,2009,30(4):1-15.

Zhu G X,Xu D J. A delaunay-tin building algorithm and optimization based on convex hull[J]. Journal of Capital Normal University:Natural Science Edition,2009,30(4):1-15.

[10] 朱翼隽,宋娜,周宗好. 带有负顾客的 Geo/Geo/1 多重工作休假排队[J]. 江苏大学学报:自然科学版,2010,31(4):488-491.

Zhu Y J,Song N,Zhou Z H. Discrete time Geo/Geo/1 queue with negative customers and multiple working vacations[J]. Journal of Jiangsu University:Natural Science Edition,2010,31(4):488-491.

Geo/Geo/1 Working Vacation Queue with N-policy and Negative Customers

GUO Hong-xia, XU Xiu-li, GENG Jie

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao Hebei 066004, China)

Abstract: This paper is on the basis of a Geom/Geom/1 queue with multiple working vacations, in addition to negative customers, N-policy and set-up time. This is a new model. The results obtained the improvement of the conclusions in previous literatures. The working vacation policy means that the servers continue to serve at a lower rate rather than stop service during the vacation, which can not only reduce the loss that the impatient customers leaves the queue because of waiting in a long time, but also improve the economical efficiency. Negative customers need not accept service; remove positive customers only one by one at the head when they are served, which obeys RCH policy. An embedded Markov chain is used to obtain the state transferring probability matrix. Using quasi-birth-and-death process and matrix-geometric solution method, the paper gains concise expressions of the steady state distributions for queue length $\pi_{kj}=p(L=k,J=j)$, $(k,j)\in\Omega$, and obtains the result of stochastic decomposition of the queue length $L^N(z)=L_0(z)L_d(z)$.

Key words: working vacation; N-policy; setup time; matrix-geometric solution; stochastic decomposition

(责任编辑 游中胜)