运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130202

集值映射向量优化的近似 Benson 真有效性*

赵 勇,赵克全,廖 伟
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:对目标映射和约束映射均为集值映射的向量优化问题(VP),引入近似 Benson 真有效解、近似 Benson 真有效元概念,推广了戎卫东与马毅提出的 ε-真有效解,并给出例子予以说明,考虑了集值映射向量优化问题的近似 Benson 真有效解。在邻近锥次似凸假设条件下,通过数值优化问题的近似解来刻画其近似 Benson 真有效解,并得到了如下的结论:(x_0,y_0)是问题(VP)的近似 Benson 真有效元当且仅当它是对应于问题(VP)的标量化问题(P_μ)的 $-\varepsilon\sigma_{-C}(\mu)$-次最优元,其必要充分条件具有相同的误差,推广和改进了已有结果。

关键词:邻近锥次似凸;近似 Benson 真有效性;标量化;向量优化
中图分类号:O221.1 文献标志码:A 文章编号:1672-6693(2013)02-0007-03

1 基本定义

近年来,许多学者将研究兴趣由单值映射的向量优化问题转化为多值映射的向量优化问题,并获得了一些新颖的结果[1-10]。Yang[3] 提出了邻近锥次似凸集值映射的概念,通过建立择一定理,得到了邻近锥次似凸集值优化问题的 Lagrange 乘子定理和两个标量化定理。Loridan[5] 在向量优化问题中引进 ε-解的概念。在文献[2]中,Rong 等在锥次似凸集值映射下讨论了向量优化问题的 ε-弱有效解,得到了标量化定理和 ε-鞍点定理,并通过 ε-Lagrange 乘子建立了 ε-对偶定理。在文献[9]中,戎卫东等讨论了集值映射向量优化问题的 ε-真有效解,在集值映射为邻近锥次似凸假设下,建立了这种解的标量化定理、ε-Lagrange 乘子定理、ε-真鞍点定理和 ε-真对偶定理。在文献[7]中,Gutierrez 等在邻近次似凸假设下得到了近似 Benson 有效解的标量化结果,同时又得到了这种解的数值 Lagarangian 必要充分最优性条件和基于这种解的集值 Lagrangian 的近似真鞍点定理。

本文考虑了集值映射向量优化问题在邻近锥次似凸假设条件下,通过数值优化问题的近似解刻画其近似 Benson 真有效解,结果推广和改进了已有文献的相应结果。

假设 X 是任意非空决策集,Y 和 Z 是分别具有序锥 D 和 K 的局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间。记 Y^* 和 Z^* 分别为 Y 和 Z 的拓扑对偶空间。假设 Y^* 中具有弱 * 拓扑 $\sigma(Y^*,Y)$。假设 D 是点闭凸锥,K 是具有非空内部的真凸锥。

记 D 的正极锥和严格正极锥为 D^+ 和 D^{s+},i.e.,

$$D^+=\{\mu\in Y^*:\mu(d)\geqslant 0,\forall d\in D\}$$

$$D^{s+}=\{\mu\in Y^*:\mu(d)>0,\forall d\in D\setminus\{0\}\}$$

对任意集合 $C\subset D\setminus\{0\}$,定义集值映射 $C:\mathbf{R}^+\to 2^D$:当 $\varepsilon>0$ 时,$C(\varepsilon)=\varepsilon C$;当 $\varepsilon=0$ 时,$C(\varepsilon)=\mathrm{cone}\ C\setminus\{0\}$。

若 $S\subset Y$ 为非空凸集,$C\subset Y$ 为凸锥,则记

$$P\min[S,C]=\{y\in S:(-D)\cap\mathrm{cl\ cone}(S+C-y)=\{0\}\}$$

考虑如下的集值向量优化问题:

$$(\mathrm{VP})\quad \min F(x)$$
$$\mathrm{s.t.}\quad x\in S=\{x\in X:G(x)\cap(-K)\neq\varnothing\}$$

其中 $F:X\to 2^Y$ 和 $G:X\to 2^Z$ 是两个集值映射。记 S 在 F 下的像集为 $F(S)=\cup_{x\in S}F(x)$。若存在 $x'\in X$,使得 $G(x')\cap(-\mathrm{int}\ K)\neq\varnothing$,则称(VP)满足广义 Slater 约束规格。

定义 1 x_0 称为是(VP)的近似 Benson 真有效解,若 $x_0\in S$ 且 $F(x_0)\cap P\min[F(S),C(\varepsilon)]\neq\varnothing$;称 (x_0,y_0) 是(VP)的近似 Benson 真有效元,若 $x_0\in S$ 且 $y_0\in F(x_0)\cap P\min[F(S),C(\varepsilon)]$。记为

$$(x_0,y_0)\in \mathrm{Be}(F,S,\varepsilon)$$

* 收稿日期:2012-07-26 网络出版时间:2013-03-16 13:37
资助项目:国家自然科学基金(No. 11126348;No. 11171363);重庆市重点实验室专项基金(No. CSTC 2011K-LORSE02);重庆市教委科技项目(No. KJ110625)
作者简介:赵勇,男,硕士研究生,研究方向为向量优化理论,E-mail:zhaoyongty@126.com;通讯作者:赵克全,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.7_002.html

例1 令 $X=Y=\mathbf{R}^2, D=\mathbf{R}_+^2$

$$C=\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_1+x_2\geqslant 1\}$$

$$S=\left\{(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}: x_1=0, \frac{1}{4}\geqslant x_2\geqslant 0 \text{ 或 } \frac{1}{4}\geqslant x_1\geqslant 0, x_2=0\right\}$$

$F:\mathbf{R}^2\to 2^{\mathbf{R}^2}$ 且定义为:当 $x_1=x_2$ 时,$F(x_1,x_2)=(0,0)$;当 $x_1<x_2$ 时,$F(x_1,x_2)=\{0\}\times\left[x_2,\frac{1}{4}\right]$;当 $x_1>x_2$ 时,$F(x_1,x_2)=\left[x_1,\frac{1}{4}\right]\times\{0\}$。取 $x_0=\left(0,\frac{1}{8}\right)^{\mathrm{T}}, \varepsilon=\frac{1}{4}$ 时,则不难得到 $x_0\in S$ 且

$$F(x_0)\cap P\min[F(S),C(\varepsilon)]\neq\varnothing$$

于是 x_0 是(VP)的近似 Benson 真有效解。

定义2[7] 令 $C\subset D\setminus\{0\}, \varepsilon\geqslant 0$,集值映射 F 称为非空集合 $M\subset X$ 上的邻近 (C,ε)-次似凸,如果 cl cone $(F(M)+C(\varepsilon))$ 是凸集。

例2 令 $M=\left[0,\frac{1}{2}\right]\times\left[0,\frac{1}{2}\right], Y=\mathbf{R}^2$

$$C=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}_+^2: x_1+x_2\geqslant 1\}, \varepsilon=\frac{1}{2}$$

定义 $F(x_1,x_2):=[x_1,+\infty)\times\left\{\sqrt{\frac{1}{4}-x_1^2}-\frac{1}{2}\right\}, \forall(x_1,x_2)\in M$。于是可以得到 cl cone $(F(M)+C(\varepsilon))$ 是凸集。因此,F 在 M 上是邻近 (C,ε)-次似凸的。

2 标量化

考虑问题(VP)的如下标量化问题

$$(P_\mu)\quad \min\langle F(S),\mu\rangle, \mu\in Y^*\setminus\{0\}$$

其中,S 为(VP)的可行域。

定义3 称 (x_0,y_0) 是 (P_μ) 的 ε-次最优元,若 $x_0\in S, y_0\in F(x_0)$,且 $\mu(y_0)-\mu(\varepsilon)\leqslant\mu(y), \forall y\in F(S)$。记所有 ε-次最优元构成的集合为

$$\varepsilon-\arg\min_S F:=\{(x_0,y_0)\in S\times F(x_0): \mu(y_0)-\mu(\varepsilon)\leqslant\mu(y), \forall y\in F(S)\}$$

引理1 令 $x_0\in S, \varepsilon\geqslant 0, y_0\in F(x_0), \varnothing\neq C\subset D\setminus\{0\}$。假设 int $D^+\neq\varnothing$,$F-y_0$ 在 S 上是邻近 (C,ε)-次似凸的。若 (x_0,y_0) 是(VP)的近似 Benson 真有效元,则存在 $\mu\in D^{S+}$ 和开区间 $H:=\{y\in Y: \mu(y)>0\}$ 使得

1) cl cone $(F(S)+C(\varepsilon)-y_0)\cap(-H)=\varnothing$;

2) cl cone $((F,G)(X)+C(\varepsilon)\times K-(y_0,0))\cap(-H\times -\text{int }K)=\varnothing$。

证明 1) 因为 (x_0,y_0) 是近似 Benson 真有效元,则有 $y_0\in F(x_0)$ 和

$$\text{cl cone }(F(S)+C(\varepsilon)-y_0)\cap(-D)=\varnothing \quad (1)$$

由于 $F-y_0$ 在 S 上是邻近 (C,ε)-次似凸的,则

$$\text{cl cone }(F(S)+C(\varepsilon)-y_0)$$

是闭凸锥。则由凸集分离定理可得,存在泛函 $\mu\in Y^*\setminus\{0\}$,使得

$$\mu(y)\geqslant 0, \forall y\in\text{cl cone }(F(S)+C(\varepsilon)-y_0) \quad (2)$$

$$\mu(d)>0, \forall d\in D\setminus\{0\} \quad (3)$$

于是由(3)式得,$\mu\in D^{S+}$,则可取得与 μ 有关的开半空间 H 使得结论1)成立。

2) 假设存在 $(a_1,a_2)\in -H\times -\text{int }K$ 及 $(\alpha_i)\subset\mathbf{R}_+$,$(x_i)\subset X$,$(d_i)\subset C(\varepsilon)$,$(k_i)\subset K$ 使得

$$\alpha_i(y_i+d_i-y_0)\to a_1, y_i\in F(x_i)$$

$$\alpha_i(z_i+k_i)\to a_2, z_i\in G(x_i) \quad (4)$$

因为 K 是真的,则可假设 $\alpha_i\neq 0$。又 $a_2\in -\text{int }K$,则可得 $\alpha_i(z_i+k_i)\in -\text{int }K$。于是由 $\alpha_i\neq 0$ 得

$$z_i\in -k_i-(1/\alpha_i)\text{int }K\subset -K$$

因此,$G(x_i)\cap(-K)\neq\varnothing$,即 (x_i) 是可行点网,则由(4)式得,$a_1\in$ cl cone $(F(S)+C(\varepsilon)-y_0)\cap(-H)$,这与结论1)矛盾。 证毕

下面先来回顾非空集合 $Q\subset Y$ 上的支撑函数

$$\sigma_Q: Y^*\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$$

为 $\sigma_Q(y^*)=\sup_{y\in Q}\{y^*(y)\}, \forall y^*\in Y^*$

定理2 令 $x_0\in S, \varepsilon\geqslant 0, y_0\in F(x_0), \varnothing\neq C\subset D\setminus\{0\}$。假设 int $D^+\neq\varnothing$,$F-y_0$ 在 S 上是邻近 (C,ε)-次似凸的。若 (x_0,y_0) 是(VP)的近似 Benson 真有效元,则存在 $\mu\in D^{S+}$ 使得

$$(x_0,y_0)\in -\varepsilon\sigma-c(\mu)-\arg\min_S(\mu\circ F)$$

证明 因为 (x_0,y_0) 是(VP)的近似 Benson 真有效,则由引理1知,存在 $\mu\in D^{S+}$ 和开半区间 $H:=\{y\in Y: \mu(y)>0\}$ 使得

$$\text{cl cone }(F(S)+C(\varepsilon)-y_0)\cap(-H)=\varnothing$$

因此,显然有

$$\mu(y)+\mu(d)-\mu(y_0)\geqslant 0, \forall y\in F(S), d\in C(\varepsilon) \quad (5)$$

于是

$$\mu(y)\geqslant\mu(y_0)-\inf_{d\in C(\varepsilon)}\mu(d)=\mu(y_0)+\sigma_{-C(\varepsilon)}(\mu), \forall y\in F(S)$$

所以,$(x_0,y_0)\in -\sigma_{-C(\varepsilon)}(\mu)-\arg\min_S(\mu\circ F)$。又容易得到

$$\sigma_{-C(\varepsilon)}(\mu)=\varepsilon\sigma_{-C(\varepsilon)}(\mu), \forall\varepsilon>0 \quad (6)$$

又由于 $C(0)\cup\{0\}$ 是一个锥,则当 $\varepsilon=0$ 时,(6)式也成立。 证毕

定理3 令 $\varepsilon\geqslant 0, \varnothing\neq C\subset D\setminus\{0\}$,有

$$\bigcup_{\mu\in D^{S+}}-\varepsilon\sigma_{-C}(\mu)-\arg\min_S(\mu\circ F)\subset\mathrm{Be}(F,S,\varepsilon)$$

证明 考虑 $\mu\in D^{S+}$ 和 $(x_0,y_0)\in -\varepsilon\sigma_{-C(\mu)}-\arg\min_S(\mu\circ F)$。假设 $(x_0,y_0)\notin\mathrm{Be}(F,S,\varepsilon)$,则存在 $v\in D\setminus\{0\}$,$(\alpha_i)\subset\mathbf{R}_+$,$(x_i)\subset S$,$y_i\in F(x_i)$ 及 $(d_i)\subset C(\varepsilon)$ 使得 $\alpha_i(y_i+d_i-y_0)\to -v$。由于 $\mu\in D^{S+}$,$v\in D\setminus\{0\}$,则可得 $\alpha_i(\mu(y_i)+\mu(d_i)-\mu(y_0))\to\mu(v)<0$。

于是可以假设存在 i_0 使得

$$\alpha_{i_0}(\mu(y_{i_0})+\mu(d_{i_0})-\mu(y_0))<0$$

从而 $\mu(y_{i_0})+\mu(d_{i_0})-\mu(y_0)<0$。

又由于 $d_{i_0}\in C(\varepsilon)$，则可以得到

$$\mu(y_{i_0})-\varepsilon\sigma-c(\mu)-\mu(y_0)\leqslant$$
$$\mu(y_{i_0})+\mu(d_{i_0})-\mu(y_0)<0$$

这与已知条件矛盾，故结论成立。　证毕

推论 1　令 $x\in S,\varepsilon\geqslant 0,y\in F(x),\varnothing\neq C\subset D\setminus\{0\}$。假设 $\operatorname{int} D^+\neq\varnothing$，$F-y$ 在 S 上是邻近 (C,ε)-次似凸的，则

$$\bigcup_{\mu\in D^{S+}}-\varepsilon\sigma_{-C(\mu)}-\arg\min_S(\mu\circ F)\subset \mathrm{Be}(F,S,\varepsilon)$$

注 1　1）推论 1 表明定理 2 得到的必要条件和定理 3 得到的充分条件之间是没有间隙的；2）当 $\varepsilon=0$ 和 $C=D\setminus\{0\}$ 时，推论 1 就退化为向量优化问题 Benson 真有效解的刻画。特别地，退化为文献[3]中的定理 6.2；3）当考虑的问题为向量情形时，推论 1 就退化为文献[7]中的推论 3.6。

参考文献：

[1] Jahn J. Vector optimization, theory, application and extensions[M]. London: Springer-Verlag, 2004.

[2] Rong W D, Wu Y N. ε-Weak minimal solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. J Optim Theory Appl, 2000, 106: 569-579.

[3] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 413-427.

[4] Yang X M, Wang S Y. On the efficiency of vector optimization problem with set-valued maps[C]//Advances in multiple criteria decision making 98. Hong Kong: Global-Link Publishing Co, 1998.

[5] Loridan P. ε-Solutions in vector minimization problems[J]. J Optim Theory Appl, 1984, 43: 265-276.

[6] Gao Y, Yang X M, Teo K L. Optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. J Ind Manag Optim, 2011(7): 483-496.

[7] Gutiérrez C, Huerga L, Novo V. Scalarization and saddle points of approximate proper solutions in nearly subconvexlike vector optimization problems[J]. J Math Anal Appl, 2012, 389: 1046-1058.

[8] 李仲飞. 集值映射向量优化的 Benson 真有效性[J]. 应用数学学报, 1998, 21(1): 123-134.
Li Z F. Benson proper efficiency in vector optimization with set-valued maps[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1998, 21(1): 123-134.

[9] 戎卫东，马毅. 集值映射向量优化问题的 ε-真有效解[J]. 运筹学学报, 2000(4): 21-32.
Rong W D, Ma Y. ε-Properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. Operations Research Transactions, 2000, 4(4): 21-32.

[10] 赵勇，彭再云，刘顶峰，等. 半 B-(p,r)-预不变凸函数与非线性规划问题[J]. 北华大学学报：自然科学版, 2012, 13(2): 153-159.
Zhao Y, Peng Z Y, Liu D F, et al. Semi-B-(p, r)-preinvex functions and nonlinear programming[J]. Journal of Beihua University: Natural Science, 2012, 13(2): 153-159.

Operations Research and Cybernetics

Approximate Benson Proper Efficiency in Vector Optimization with Set-Valued Maps

ZHAO Yong, ZHAO Ke-quan, LIAO Wei

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, for vector optimization problems (VP) with the objective function and constraint function are set valued maps, the concepts of approximate Benson properly efficient solutions and approximate Benson properly efficient element are introduced, which extend ε-properly efficient solution introduced by Rong Weidong and Ma Yi, and an example is given to illustrate it. Then approximate Benson properly efficient solutions of vector optimization with set-valued maps are considered. Under the assumption of nearly cone subconvexlikeness, we obtain the conclusions about the approximate solutions of vector optimization problems through associated scalar optimization problems: $(x_0,\ y_0)$ is approximate Benson properly efficient element of problem (VP) if and only if it is $-\varepsilon\sigma_{-C}(\mu)$ $-$suboptimal element for the scalar problem (P_μ) corresponds to (VP). Especially, the necessary and sufficient conditions have the same error, which extend and improve corresponding ones in the literature.

Key words: nearly cone subconvexlikeness; approximate Benson proper efficiency; scalarization; vector optimization

（责任编辑　黄　颖）