DOI:10.11721/cqnuj20130208

Clifford 分析中 Isotonic 函数带位移的非线性边值问题*

鄢盛勇
(成都师范学院 数学系,成都 611130)

摘要 本文讨论了定义于偶数维欧氏空间 $\mathbf{R}^{2m}$ 而取值于复 Clifford 代数 C_m,且满足方程 $\partial_{\underline{x}_1}f(x)+\mathrm{i}\tilde{f}(x)\partial_{\underline{x}_2}=0$ 的 Isotonic 函数的一类带位移带共轭的非线性边值问题。首先设计积分算子将边值问题转化为积分方程问题,然后研究积分算子的性质,借助积分方程理论和 Schauder 不动点理论证明了边值问题解的存在性,并给出了解的积分表达式 $f(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1\varphi_0(y)+\mathrm{i}\,\tilde{\varphi}_0(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(\varphi_0(y)\underline{n}_2-\mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{\varphi}_0(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y$。

关键词:Clifford 分析;Isotonic 函数;带位移边值问题;非线性
中图分类号:O175.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)02-0034-05

Clifford 分析是近代分析的重要分支,它有非常重要的理论意义和应用价值,如在 Maxwell 方程、Yang-Mill 场理论以及量子力学等方面都应用了它的一些结论[1-2]。近年来,文献[3-11]研究了定义于 $\mathbf{R}^{2m}$ 中子区域而取值于复 Clifford 代数 C_m 的 Isotonic 函数,得到了其柯西积分公式。在文献[12-15]中处理了高维空间中的一些边值问题,在此基础上,本文讨论了有界域上 Isotonic 函数的带位移带共轭的非线性边值问题

$$\begin{gathered}a(x)f^+(x)+b(x)\overline{f^+(\alpha(x))}+\\c(x)f^-(x)+d(x)\overline{f^-(\alpha(x))}=\\e(x)g(x,f^+(x),\overline{f^+(\alpha(x))},f^-(x),\overline{f^-(\alpha(x))})\end{gathered}\quad(1)$$

其中 $\alpha(x)$ 是 $\partial\Omega$ 到自身的同构映射,证明了其解的存在性,并给出了解的积分表达式,从而改进了文献[11-13]中的一些结果。

1 预备知识与记号

C_n 为 2^n 维 Clifford 代数,其正交基由 $\{e_A:A=(h_1,\cdots,h_r)\in PN,1\leqslant h_1\leqslant\cdots\leqslant h_r\leqslant n\}$ 给出,其中 $N=\{1,\cdots,n\}$,PN 表示 N 的所有有序子集的集合。记 $e_\varnothing=e_0$,$e_A=e_{h_1}\cdot e_{h_2}\cdot\cdots\cdot e_{h_r}$,其基底元适合下列规则:$e_ie_j=-e_je_i,i\neq j$;$e_i^2=-1$,$i,j=1,\cdots,n$。$C_n$ 中的元 $a=\sum\limits_{A\in PN}a_Ae_A$,$a_A\in C$,其主对合,共轭分别定义为

$$\tilde{a}=\sum_{A\in PN}a_A\tilde{e}_A,\tilde{e}_A=(-1)^re_A$$

$$\bar{a}=\sum_{A\in PN}\bar{a}_A\bar{e}_A,\bar{e}_A=(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}e_A$$

易见 $\forall a,b\in C_n$,$\widetilde{(ab)}=\tilde{a}\tilde{b}$,$\overline{(ab)}=\bar{b}\,\bar{a}$,其模为 $|a|=\left(\sum\limits_{A\in PN}|a_A|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,且 $|\bar{a}|=|a|$,$|a+b|\leqslant|a|+|b|$,$|ab|\leqslant 2^n|a||b|$。设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具光滑定向的 Liapunove 边界 $\partial\Omega$ 的有界域,定义于 Ω 取值于 C_n 的函数可表示为 $f(x)=\sum\limits_{A\in PN}f_A(x)e_A$,这里 $f_A(x)$ 是定义在 Ω 上的复值函数。Dirac 算子定义为 $\partial_x=\sum\limits_{j=1}^{n}e_j\partial_{x_j}$,其基本解为 $\frac{\bar{x}}{\omega_n|x|^n}$,$x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$,其中 ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位超球面面积,且对 $\forall x,y,z\in\mathbf{R}^n$,$x\neq z$ 有

$$\left|\frac{\bar{y}-\bar{x}}{\omega_n|y-x|^n}-\frac{\bar{y}-\bar{z}}{\omega_n|y-z|^n}\right|\leqslant M_0|x-z|\sum_{j=1}^{n-1}|y-x|^{-j}|y-z|^{j-n}\quad(2)$$

其中 M_0 是仅依赖维数 n 的正常数。$H^\beta(\partial\Omega,C_n)$,$(0<\beta<1)$ 表示定义于 $\partial\Omega$ 取值于 C_n 的 Hölder 连续函数集合,定义模 $\|f\|_\beta=C(f)+H(f)$,其中

$$C(f)=\sup_{x\in\partial\Omega}|f(x)|,H(f)=\sup_{x\neq y,x,y\in\partial\Omega}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta}$$

于是 $H^\beta(\partial\Omega,C_n)$ 构成 Banach 空间,且

* 收稿日期:2012-05-20 网络出版时间:2013-03-16 13:37
资助项目:教育部科学技术研究重点项目(No. 212147);成都师范学院科研重点项目(No. CSYXM12-06)
作者简介:鄢盛勇,男,副教授,硕士,研究方向为函数论与偏微分方程的边值问题,E-mail:yanshengyong2002@yahoo.com.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.34_008.html

$$\|f+g\|_\beta \leqslant \|f\|_\beta + \|g\|_\beta, \|fg\|_\beta \leqslant 2^n \|f\|_\beta \|g\|_\beta, \|\bar{f}\|_\beta = \|f\|_\beta$$

2 Isotonic 函数与柯西型积分

以后设 $n=2m$，主要考虑函数空间 $H^\beta(\partial\Omega, C_m)$。令 $I_j=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}e_je_{j+m})$，$j=1,\cdots,m$；$I=\prod_{j=1}^m I_j$ 计算易得：1）$\forall a\in C_m$，有 $aI=0\Leftrightarrow a=0$；2）$e_{j+m}I=\mathrm{i}e_jI$；3）$\forall a\in C_m$，$e_{j+m}aI=\mathrm{i}\,\tilde{a}e_jI$，$e_jaI=-\mathrm{i}\,\tilde{a}e_{j+m}I$，$j=1,\cdots,m$。

向量 x 及相应 Dirac 算子可改写成

$$x=\sum_{j=1}^m (x_je_j+x_{j+m}e_{j+m})$$

$$\partial_x=\sum_{j=1}^m (e_j\partial_{x_j}+e_{j+m}\partial_{x_{j+m}})$$

引进如下 Clifford 向量及相应 Dirac 算子

$$\underline{x}_1=\sum_{j=1}^m x_je_j, \partial_{\underline{x}_1}=\sum_{j=1}^m e_j\partial_{x_j}$$

$$\underline{x}_2=\sum_{j=1}^m x_{j+m}e_j, \partial_{\underline{x}_2}=\sum_{j=1}^m e_j\partial_{x_{j+m}}$$

定义 1　定义于 Ω 取值于 C_m 满足 $\partial_{\underline{x}_1}f(x)+\mathrm{i}\tilde{f}(x)\partial_{\underline{x}_2}=0$ 的连续函数 $f(x)$ 称为 Isotonic 函数。

注 1　取复值的 Isotonic 函数 $f(x)$ 是多复变全纯函数；取值于 $R_{0,m}$ 的 Isotonic 函数 $f(x)$ 是双正则函数。Isotonic 函数与单演函数的关系见引理 1；与 Hermitean 单演函数[7,16] 的关系见引理 2。利用 I 的性质直接计算易证：

引理 1　$f(x)$ 在 Ω 中是 Isotonic 的充要条件是：$f(x)I$ 在 Ω 中是单演的。

引理 2　设 $f(x)$ 是定义在 Ω 中取值于 C_m 的连续可微函数，则 $f(x)$ 是 Hermitean 单演函数[16] 的充要条件是 $\partial_{\underline{x}_1}f(x)+\mathrm{i}\tilde{f}(x)\partial_{\underline{x}_2}=0$，$\tilde{f}(x)\partial_x=0$。

引理 3[8-10]（柯西积分定理）　设 $f(x)$ 在 Ω 邻域内连续，且在 Ω 内是 Isotonic 的，则 $\forall x\in\Omega$ 有

$$f(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1f(y)+\mathrm{i}\tilde{f}(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(f(y)\underline{n}_2-\mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{f}(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y \tag{3}$$

其中 $\underline{n}=\sum_{j=1}^{2m}e_jn_j$ 是 $\partial\Omega$ 在 y 点的外法单位向量，$\underline{y}_1$，$\underline{n}_1$，$\underline{y}_2$，$\underline{n}_2$ 分别类似于 $\underline{x}_1$，$\underline{x}_2$。

定义 2　设 $f(x)\in H^\beta(\partial\Omega, C_m)$，称下列算子为 Isotonic 柯西型积分，简记为

$$(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(x)=\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1f(y)+\mathrm{i}\tilde{f}(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(f(y)\underline{n}_2-\mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{f}(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y$$

引理 4　设 $f(y)\in H^\beta(\partial\Omega, C_m)$，则 $(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(x)$ 在 $\mathbf{R}^{2m}\backslash\partial\Omega$ 内是 Isotonic 的。

证明　由 I 的性质计算可得

$$f(y)I\in H^\beta(\partial\Omega, C_{2m})$$

$$(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1f(y)+\mathrm{i}\tilde{f}(y)\underline{n}_2)+(f(y)\underline{n}_2-\mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{f}(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)=(y-x)\underline{n}(y)f(y)I$$

于是 $$(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(x)I=S_{\partial\Omega}(fI)(x)$$

其中 $(S_{\partial\Omega}\varphi)(x)=\int_{\partial\Omega}\frac{(\bar{y}-\bar{x})}{\omega_{2m}|y-x|^{2m}}\mathrm{d}\sigma_y\varphi(y)$。

由文献[2]知道 $S_{\partial\Omega}(fI)(x)$ 在 $\mathbf{R}^{2m}\backslash\partial\Omega$ 内是单演函数，再根据引理 1 得证。　　证毕

引理 5[8-10]（Plemelj 公式）　设 $f(y)\in H^\beta(\partial\Omega, C_m)$，则 $(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(x)$ 在柯西主值意义下存在，且有

$$\lim_{z\in\Omega^\pm, z\to x}(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(z)=\pm\frac{1}{2}f(x)+(S_{\partial\Omega}^{isot}f)(x), x\in\partial\Omega \tag{4}$$

推论 1　$\partial\Omega$ 如上所述，在柯西主值意义下有 $(S_{\partial\Omega}^{isot}1)(x)=\frac{1}{2}$，$x\in\partial\Omega$。

3 问题的提出与转化

Ω，$\partial\Omega$ 如前所述，$a(x)$，$b(x)$，$c(x)$，$d(x)$，$e(x)\in H^\beta(\partial\Omega, C_m)$ 为给定的函数，$\alpha(x)$ 为 $\partial\Omega$ 上的 Haseman 位移[13]，记 $\Omega^+=\Omega$，$\Omega^-=\mathbf{R}^{2m}\backslash\overline{\Omega}$，作者要找在 $\Omega^\pm$ 内 Isotonic，在 $\overline{\Omega^\pm}$ 上连续，且 $f^-(\infty)=0$ 的函数 $f(x)$，满足边界条件（1），称此边值问题为问题 IR。

首先将此边值问题转化为积分方程。由引理 4 和文献[9]，令 $f(x)=(S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)$，$x\in\Omega^\pm$，这里 $\varphi(x)\in H^\beta(\partial\Omega, C_m)$ 为未知的有界函数，由引理 5 有 $f^\pm(x)=\pm\frac{1}{2}\varphi(x)+(S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)$，$x\in\partial\Omega$。

将 x 换成 $\alpha(x)$，类似地有

$$f^\pm(\alpha(x))=\pm\frac{1}{2}\varphi(\alpha(x))+(S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(\alpha(x)), x\in\partial\Omega$$

其中 $$(S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(\alpha(x))=$$

$$\int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{\alpha}_1(x)-\underline{y}_1)(\underline{n}_1f(y)+\mathrm{i}\tilde{f}(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|\alpha(x)-y|^{2m}}+\right.$$

$$\frac{(f(y)\underline{n}_2 - \mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{f}(y))(\underline{\alpha}_2(x)-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|\alpha(x)-y|^{2m}}\Big]\mathrm{d}S_y$$

记号 $\underline{\alpha}_1(x)$,$\underline{\alpha}_2(x)$ 分别类似于 $\underline{x}_1$,$\underline{x}_2$。故

$$\overline{f^{\pm}(\alpha(x))} = \pm\frac{1}{2}\overline{\varphi(\alpha(x))} + \overline{(S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(\alpha(x))},x\in\partial\Omega$$

令 $\varphi' = \varphi(\alpha(x))$,$P\varphi = \frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)$,$P'\varphi = \frac{1}{2}\varphi' - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(\alpha(x))$。引入算子:$E\varphi = (a+c)P\varphi + (b+d)\overline{P'\varphi} + (1-a)\varphi - b\overline{\varphi'} + eg$,将 $f^{\pm}(x)$,$\overline{f^{\pm}(\alpha(x))}$ 的表达式代入(1)式,则问题 IR 转化为求解积分方程:$E\varphi=\varphi$。

4 问题 IR 的解法

定理1 对任意函数 $\varphi\in H^{\beta}(\partial\Omega,C_{2m})$,有

$$\left\|\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right\|_{\beta}\leqslant M_1\ \|\varphi\|_{\beta}$$

其中 M_1 是与 x,φ 都无关的正常数(以下记号 M_2 等都与此类似)。

证明 由文献[17]有 $(S_{\partial\Omega}1)(z)=\frac{1}{2}$,$z\in\partial\Omega$,故

$$\left|\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right| =$$
$$|(S_{\partial\Omega}1)(x)\cdot\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)| =$$
$$\left|\int_{\partial\Omega}\frac{\bar{y}-\bar{x}}{\omega_{2m}|y-x|^{2m}}\mathrm{d}\sigma_y[\varphi(y)-\varphi(x)]\right|\leqslant$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{H(\varphi)\mathrm{d}S_y}{\omega_{2m}|y-x|^{2m-1-\beta}}\leqslant M_2H(\varphi)$$

所以有 $C\left(\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right)\leqslant M_2H(\varphi)\leqslant M_2\ \|\varphi\|_{\beta}$。

对任意的 $x,z\in\partial\Omega$,仅考虑 $|x-z|=\delta>0$ 充分小的情形

$$K\stackrel{\square}{=}\left|\left[\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right] - \left[\frac{1}{2}\varphi(z) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(z)\right]\right|\leqslant$$
$$\left|\int_{\partial\Omega}\frac{(\bar{y}-\bar{x})\mathrm{d}\sigma_y}{\omega_{2m}|y-x|^{2m}}[\varphi(y)-\varphi(x)] - \int_{\partial\Omega}\frac{(\bar{y}-\bar{z})\mathrm{d}\sigma_y}{\omega_{2m}|y-z|^{2m}}[\varphi(y)-\varphi(z)]\right|\leqslant$$
$$\frac{1}{\omega_{2m}}\left|\int_{\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)}\left[\frac{\bar{y}-\bar{x}}{|y-x|^{2m}} - \frac{\bar{y}-\bar{z}}{|y-z|^{2m}}\right]\mathrm{d}\sigma_y[\varphi(y)-\varphi(x)] - \int_{\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)}\frac{\bar{y}-\bar{z}}{|y-z|^{2m}}\mathrm{d}\sigma_y[\varphi(x)-\varphi(z)]\right| +$$
$$\int_{\partial\Omega\cap B_{4\delta}(x)}\frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{\omega_{2m}|y-x|^{2m-1}}\mathrm{d}S_y + \int_{\partial\Omega\cap B_{4\delta}(z)}\frac{|\varphi(y)-\varphi(z)|}{\omega_{2m}|y-z|^{2m-1}}\mathrm{d}S_y$$

其中 $B_{\delta}(x)$ 表示中心在 x 半径为 δ 的超球。当 $y\in\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)$ 时,

$$2\delta\leqslant|y-x|\leqslant|y-z|+\delta$$

所以 $|z-y|\geqslant\delta$,故 $|y-x|\leqslant 2|z-y|$,$|z-y|^{-1}\leqslant 2|y-x|^{-1}$,由(2)式得

$$K\leqslant M_3\delta H(\varphi)\int_{\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)}\frac{\mathrm{d}S_y}{|y-x|^{2m-\beta}} + M_4\delta^{\beta}H(\varphi)\left|\int_{\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)}\frac{(\bar{y}-\bar{z})\mathrm{d}\sigma_y}{|y-z|^{2m}}\right| + M_5H(\varphi)\times\left(\int_{\partial\Omega\cap B_{4\delta}(x)}\frac{\mathrm{d}S_y}{|y-x|^{2m-1-\beta}} + \int_{\partial\Omega\cap B_{4\delta}(z)}\frac{\mathrm{d}S_y}{|y-z|^{2m-1-\beta}}\right)$$

由于 $(S_{\partial\Omega}1)(z)=\frac{1}{2}$,$z\in\partial\Omega$,且 δ 充分小,故 $\left|\int_{\partial\Omega\backslash B_{2\delta}(x)}\frac{(\bar{y}-\bar{z})\mathrm{d}\sigma_y}{|y-z|^{2m}}\right|<1$。而 $\partial\Omega$ 有界,所以

$$K\leqslant M_6\delta H(\varphi)\cdot\int_{2\delta}^{\gamma}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2-\beta}} + M_4\delta^{\beta}H(\varphi) + M_7\delta^{\beta}H(\varphi)\leqslant M_8\delta^{\beta}H(\varphi)$$

其中 γ 是 $\partial\Omega$ 的直径。故

$$H\left(\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right)\leqslant M_8\ \|\varphi\|_{\beta}$$

综上 $\left\|\frac{1}{2}\varphi(x) - (S_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right\|_{\beta}\leqslant M_1\ \|\varphi\|_{\beta}$。 证毕

定理2 对 $\forall\varphi\in H^{\beta}(\partial\Omega,C_m)$,有 $\|P\varphi\|_{\beta}\leqslant M_9\ \|\varphi\|_{\beta}$。

证明 由 I 的性质(3),以及定理1有

$$\varphi I\in H^{\beta}(\partial\Omega,C_{2m})$$
$$(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1\varphi(y)+\mathrm{i}\,\tilde{\varphi}(y)\underline{n}_2) + (\varphi(y)\underline{n}_2 - \mathrm{i}\,\underline{n}_1\tilde{\varphi}(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2) = (y-x)\underline{n}(y)\varphi I$$

从而有
$$\left|\frac{1}{2}\varphi(x)I - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)I\right| = \left|\frac{1}{2}\varphi(x)I - (S_{\partial\Omega}\varphi I)(x)\right|\leqslant M_1\ \|\varphi I\|_{\beta}$$
$$\left|\left[\frac{1}{2}\varphi(x)I - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)I\right] - \left[\frac{1}{2}\varphi(y)I - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(y)I\right]\right| =$$
$$\left|\left[\frac{1}{2}\varphi(x)I - (S_{\partial\Omega}^{isot}\varphi)(x)I\right] - \left[\frac{1}{2}\varphi(y)I - (S_{\partial\Omega}\varphi I)(y)\right]\right|\leqslant M_1\ \|\varphi I\|_{\beta}$$

故结论成立。 证毕

推论 2　对 $\forall \varphi \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$，有

$$\left\|\frac{1}{2}\varphi(x) + (S^{isot}_{\partial\Omega}\varphi)(x)\right\|_{\beta} \leqslant M_{10}\,\|\varphi\|_{\beta}$$

定理 3　设 $\partial\Omega$ 上的同胚映射 $\alpha(x)$ 满足 Lipschitz 条件：$|\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant L|x-y|$，$x, y \in \partial\Omega$，$\varphi \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$，有 $\|\varphi'\|_{\beta} \leqslant (1+L^{\beta})\|\varphi\|_{\beta}$。

证明　由已知条件和 $\|\cdot\|_{\beta}$ 的定义易证。　**证毕**

推论 3　设 $\varphi \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$，$\alpha(x)$ 满足定理 3 的条件，则 $\|\overline{\varphi'}\|_{\beta} \leqslant (1+L^{\beta})\|\varphi\|_{\beta}$。

定理 4　设 $\varphi \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$，$\alpha(x)$ 满足定理 3 的条件，则有 $\|P'\varphi\|_{\beta} \leqslant M_{11}\|\varphi\|_{\beta}$。

证明　由 $\|\cdot\|_{\beta}$ 的定义与定理 2 易得。**证毕**

推论 4　φ, α 如定理 3 所述，则 $\|\overline{P'\varphi}\|_{\beta} \leqslant M_{11}\|\varphi\|_{\beta}$，$\left\|\frac{1}{2}\overline{\varphi'} + \overline{(S^{isot}_{\partial\Omega}\varphi)(\alpha(x))}\right\|_{\beta} \leqslant M_{12}\|\varphi\|_{\beta}$。

定理 5　Ω 是 $\mathbf{R}^{2m}$ 中具光滑定向 Liapunove 边界 $\partial\Omega$ 的有界域，$\alpha(x)$ 满足 Lipschitz 条件，$g(x, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)})$ 定义于 $\partial\Omega \times (C_m)^4$，满足对 x 的 Hölder 条件和对 $\Phi^{(i)}$，$i = 1, \cdots, 4$ 的 Lipschitz 条件：

$$\begin{gathered}\|g(x, \Phi_1^{(1)}, \Phi_1^{(2)}, \Phi_1^{(3)}, \Phi_1^{(4)}) - \\ g(x, \Phi_2^{(1)}, \Phi_2^{(2)}, \Phi_2^{(3)}, \Phi_2^{(4)})\|_{\beta} \leqslant \\ M_{13}|x-y|^{\beta} + M_{14}|\Phi_1^{(1)} - \Phi_2^{(1)}| + \\ M_{15}|\Phi_1^{(2)} - \Phi_2^{(2)}| + M_{16}|\Phi_1^{(3)} - \Phi_2^{(3)}| + \\ M_{17}|\Phi_1^{(4)} - \Phi_2^{(4)}|\end{gathered}$$

又设 $g(x_0, 0, 0, 0, 0) = 0$，x_0 是 $\partial\Omega$ 上一定点，$a, b, c, d, e \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$，$\|a+c\|_{\beta}$，$\|b+d\|_{\beta}$，$\|1-a\|_{\beta}$，$\|b\|_{\beta} < \delta < 1$，$\|e\|_{\beta} = \mu$，$0 < \mu < \dfrac{M[1 - 2^m\delta(M_9 + M_{11} + 2 + L^{\beta})]}{2^m(M_{22} + M_{23}M)}$，则问题 IR 可解，解表达式为(5)式。

$$f(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1 - \underline{y}_1)(\underline{n}_1\varphi_0(y) + \mathrm{i}\,\tilde{\varphi}_0(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}} + \frac{(\underline{n}_2 - \mathrm{i}\,\underline{n}_1\,\tilde{\varphi}_0(y))(\underline{x}_2 - \underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]\mathrm{d}S_y \tag{5}$$

证明　令 $B = \{\varphi \mid \varphi \in H^{\beta}(\partial\Omega, C_m), \|\varphi\|_{\beta} \leqslant M\}$ 是 Banach 空间 $H^{\beta}(\partial\Omega, C_m)$ 的一闭子空间，由定理 2，推论 2，3 可得

$$\|E\varphi\|_{\beta} \leqslant 2^m\delta(M_9 + M_{11} + 2 + L^{\beta})\|\varphi\|_{\beta} + 2^m\,\|e\|_{\beta}\,\|g\|_{\beta}$$

对于 $\|g\|_{\beta}$：由已知，定理 2，4，推论 1，3 可得

$$\begin{gathered}C(g) = \max_{x\in\partial\Omega}|g(x, f^+(x), \overline{f^+(\alpha(x))}, f^-(x), \overline{f^-(\alpha(x))}) - g(x_0, 0, 0, 0, 0)| \leqslant \\ \max_{x\in\partial\Omega}[M_{13}|x - x_0|^{\beta} + M_{14}|f^+(x)| + \\ M_{15}|\overline{f^+(\alpha(x))}| + M_{16}|f^-(x)| + \\ M_{17}|\overline{f^-(\alpha(x))}|] \leqslant M_{18} + (M_{14}M_{10} + \\ M_{15}M_{12} + M_{16}M_9 + M_{17}M_{11})\|\varphi\|_{\beta} = \\ M_{18} + M_{19}\|\varphi\|_{\beta}\end{gathered}$$

类似可证 $H(g) \leqslant M_{20} + M_{21}\|\varphi\|_{\beta}$，故 $\|g\|_{\beta} \leqslant M_{22} + M_{23}\|\varphi\|_{\beta}$，所以

$$\begin{gathered}\|E\varphi\|_{\beta} \leqslant 2^m\delta(M_9 + M_{11} + 2 + L^{\beta})\|\varphi\|_{\beta} + \\ 2^m\mu(M_{22} + M_{23}\|\varphi\|_{\beta}) < M\end{gathered}$$

故算子 E 是由 B 到 B 到自身的映射。

对任意函数列 $\{\varphi_k\} \in B$，设其在 $\partial\Omega$ 上一致收敛于 $\varphi \in B$，即对 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists K \in N_*$，当 $k > K$ 时，有 $\|\varphi_k - \varphi\|_{\beta} < \varepsilon$，由定理 2，推论 1，2，3 有

$$\begin{gathered}|\overline{(\varphi_k - \varphi)'}| \leqslant (1+L^{\beta})\varepsilon,\ |P(\varphi_k - \varphi)| \leqslant \\ M_9\varepsilon,\ |\overline{P'(\varphi_k - \varphi)}| \leqslant M_{11}\varepsilon\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}|g(x, \varphi_k - P\varphi_k, \overline{\varphi_k' - P'\varphi_k}, -P\varphi_k, -\overline{P'\varphi_k}) - \\ g(x, \varphi - P\varphi, \overline{\varphi' - P'\varphi}, -P\varphi, -\overline{P'\varphi})| \leqslant \\ M_{17}|(\varphi_k - P\varphi_k) - (\varphi - P\varphi)| + \\ M_{18}|\overline{(\varphi_k' - P'\varphi_k)} - \overline{(\varphi' - P'\varphi)}| + \\ M_{19}|P\varphi_k - P\varphi| + M_{20}|\overline{P'\varphi_k} - \overline{P'\varphi}| \leqslant \\ M_{17}|(\varphi_k - \varphi) - P(\varphi_k - \varphi)| + \\ M_{18}|\overline{(\varphi_k - \varphi)'} - \overline{P'(\varphi_k - \varphi)}| + \\ M_{19}|P(\varphi_k - \varphi)| + M_{20}|\overline{P'(\varphi_k - \varphi)}| \leqslant \\ (M_{17}M_{11} + M_{18}M_{13} + M_{19}M_9 + \\ M_{20}M_{15})\|\varphi_k - \varphi\|_{\beta} \leqslant M_{24}\varepsilon\end{gathered}$$

综上，存在 $M_{25} > 0$，使得 $|E\varphi_k - E\varphi| \leqslant M_{25}\varepsilon$，即 E 为 B 上的连续映射。根据 Arzela-Ascoli 定理知，B 是 $C(\partial\Omega)$ 中的紧集，故 E 映射闭凸集 B 到自身，且 $E(B)$ 也是 $C(\partial\Omega)$ 中的紧集，由 Schauder 不动点原理知，至少存在一个 $\varphi_0(x)$，使 $E\varphi_0 = \varphi_0$。将此 φ_0 代入(5)式得解 $f(x)$。　**证毕**

参考文献：

[1] Brackx F, Delanghe R, Sommen F. Clifford analysis[M]. Pitman, London: Res Notes Math, 1982.

[2] Huang S, Qiao Y Y, Wen G C. Real and complex Clifford analysis [M]. Heidelberg: Spingger, 2005.

[3] Sommen F, Peña-Peña D. Martinelli-Bochner formula using Clifford analysis[J]. Arch Math, 2007, 88: 358-363.

[4] Abreu-Blaya R, Bory-Reyes J. A Martinelli-Bochner formula on fractal domains [J]. Arch Math, 2009, 92: 335-343.

[5] Abreu-Blaya R, Bory-Reyes J, Peña-Peña D, et al. Holomorphic extension theorems in Lipschitz domains of C^2 [J]. Adv

Appl Clifford alg,2010,20:1-12.

[6] Abreu-Blaya R,Bory-Reyes J, Peña-Peña D,et al. A holomorphic extension theorems using Clifford analysis [J]. Complex Anal Oper Theory,2011,5:113-130.

[7] Abreu-Blaya R,Bory-Reyes J, Brackx F,et al. A Hermitian cauchy formula on a domain with fractal boundary[J]. J Math Anal Appl,2010,369:273-282.

[8] Abreu-Blaya R,Bory-Reyes J, Pe ña-Pe ña D,et al. Biregular extendability via Isotonic Clifford analysis [J]. Math Meth Appl Sci,2010,33:384-393.

[9] Abreu-Blaya R,Bory-Reyes J, Pe ña-Pe ña D,et al. The Isotonic cauchy transform[J]. Adv appl Clifford Alg,2007,17(2):145-152.

[10] **库敏,杜金元,王道顺**. Clifford **分析中** Isotonic **柯西型积分的边界性质**[J]. **数学学报**,2011,54(2):177-186.
Ku M,Du J Y,Wang D S. The boundary behavior of Isotonic Cauchy type integral in Clifford analysis[J]. Acta Math Sin Chin Ser,2011, 54(2):177-186.

[11] **鄢盛勇**. Clifford **分析中** Isotonic **函数带** Hasemann **位移的线性边值问题**[J]. **广西民族大学学报:自然科学版**,2012,18(3):43-47.
Yan S Y. A linear boundary value problem with Haseman shift for Isotonic function in Clifford analysis[J]. Journal of Guangxi University for Nationalities:Natural Science Edition,2012,18(3):43-47.

[12] **乔玉英**. **双正则函数的非线性带位移边值问题**[J]. **系统科学与数学**,1999,19(4):484-489.
Qiao Y Y. A nonlinear boundary value problem with a Haseman shift for biregular function[J]. J Sys Sci Math Scis,1999,19(4):484-489.

[13] **黄沙**. Clifford **分析中一个带** Haseman **位移的边值问题**[J]. **系统科学与数学**,1996,16(1):60-64.
Huang S. A boundary value problem with a Haseman shift in Clifford analysis [J]. J Sys Sci Math Scis, 1996,16(1):60-64.

[14] **李觉友**. Moisil-Theodorsco **方程组的一个非线性边值问题**[J]. **重庆师范大学学报:自然科学版**,2008,25(1):42-46.
Li J Y. A nonlinear boundary value problem in Moisil-Theodorsco system[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science, 2008,25(1):42-46.

[15] **李觉友**. **非齐次** Moisil-Theodorsco **方程组的** Riemann **边值问题**[J]. **重庆师范大学学报:自然科学版**,2007,24(4):26-29.
Li J Y. The Riemann boundary value problem in inhomogeneous Moisil-Theodorsco system[J]. Journal of Chongqing Normal University:Natural Science, 2007,24(4):26-29.

[16] Brackx F,Bures J, De Schepper H,et al. Fundaments of Hermitean Clifford analysis part I [J]. Complex Structure, Complex Analysis and Operator Theory,2007,1(3):341-365.

[17] Jin Y D,Na x,Zhong X Z. Boundary behavior of Chauchy-Type integrals in Clifford analysis[J]. Acta Math Sci,2009,29(B):210-224.

A Nonlinear Boundary Value Problem with Haseman Shift for Isotonic Function in Clifford Analysis

YAN Sheng-yong

(Dept. of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

Abstract: In this paper, we discuss a class of nonlinear boundary value problem with conjugate value and haseman shift for Isotonic function in Euclidean space of even dimension with values in a complex Clifford algebra. Isotonic function is solution of the equation $\partial_{\underline{x}_1} f(x) + i\tilde{f}(x)\partial_{\underline{x}_2} = 0$. We give some integral operators and transform the problem into an integral equation problem. The properties of these integral operators are studied. Applying Schauder fixed-point theorem, we prove the existence of solution for the problem, and give the representation of solution: $f(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1\varphi_0(y)+i\tilde{\varphi}_0(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(\varphi_0(y)\underline{n}_2-i\underline{n}_1\tilde{\varphi}_0(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]dS_y f(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\frac{(\underline{x}_1-\underline{y}_1)(\underline{n}_1\varphi_0(y)+i\tilde{\varphi}_0(y)\underline{n}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}+\frac{(\varphi_0(y)\underline{n}_2-i\underline{n}_1\tilde{\varphi}_0(y))(\underline{x}_2-\underline{y}_2)}{\omega_{2m}|x-y|^{2m}}\right]dS_y$.

Key words: Clifford analysis; Isotonic function; boundary value problem with shift; nonlinear

(责任编辑 游中胜)