DOI :10. 11721/cqnuj20130212

一类二阶非齐次欧拉方程的特解*

张 守 贵
(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要 :对一类形如 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$ 的二阶欧拉非齐次线性常微分方程,利用变量变换化为常系数线性常微分方程。然后用复数法讨论了具有形如 $f(x)=Ax^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|)$ 和 $f(x)=Ax^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)$ 非齐次项时求特解的方法,得到了用 $\frac{A}{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))$ 和 $\frac{A}{F'(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}\ln|x|(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))$ 表示特解的一般公式。应用该方法简单便捷地得到了若干算例结果,表明了所得结论的正确性和算法的实用性。

关键词 :欧拉方程 ;非齐次 ;特解 ;变量变换 ;复数法
中图分类号 :O175. 1　　**文献标志码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2013)02-0050-03

欧拉方程是常微分方程和高等数学课程中的一个重要内容。非齐次线性常微分方程的通解可表示为它的一个特解与对应齐次线性常微分方程的通解之和。求解常系数齐次线性常微分方程的基本解组有经典的特征根法(或欧拉待定函数法),求解常系数非齐次线性常微分方程的特解的解法则有比较系数法、拉普拉斯变换法和常数变易法[1-7]。但是上述求特解的计算过程还是比较繁琐的。对一类特殊的二阶非齐次线性常微分方程,本文利用变量变换和复数法得到一种直接求特解的简单方法和一般公式,使得求特解变得更简单[8]。

考虑如下二阶非齐次线性常微分方程

$$x^2y''+pxy'+qy=f(x)\tag{1}$$

当 $f(x)$ 具有某些特殊形式时求特解的方法,这里 p 和 q 均为常数, $f(x)$ 为连续函数。

1 类型 I

设 $f(x)=Ax^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|)$,其中 A、α 和 β 为确定的常数。由于方程(1)所对应的齐次线性常微分方程 $x^2y''+pxy'+qy=0$ 为欧拉方程,其特征方程为

$$K(K-1)+pK+q=0\tag{2}$$

如果记 $F(K)=K(K-1)+pK+q$,则方程(1)的特解 $\tilde{y}$ 可由以下定理得到。

定理 1　如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 不是特征方程(2)的根,则 $\tilde{y}$

$$=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))\right\}$$

如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程(2)的单根,则

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}\ln|x|(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))\right\}$$

如果 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程(2)的重根,则

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F''(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}\ln^2|x|(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))\right\}$$

这里只证明 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是单根的情形,其他情形类似可证[1]。

证明　如果 $x>0$,做变量变换 $x=\mathrm{e}^t$, $t=\ln x$,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=$$

$$\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

变换后,原方程(1)可化为常系数线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\tag{3}$$

先用复数法求方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=A\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t}\tag{4}$$

的特解。

由于 $\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是特征方程(2)的单根,利用比较系数

* 收稿日期 :2012-06-27　　网络出版时间 :2013-03-16　13 :37
资助项目 :重庆师范大学教改项目(No. CYIGl1213);重庆师范大学科研项目(No. 13XL001)
作者简介 :张守贵,男,讲师,博士研究生,研究方向为微分方程数值解,E-mail :Shgzhang9621@ sina. com
网络出版地址 :http ://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20130316. 1337. 201302. 50_012. html

法可令方程(4)的特解为

$$\tilde{y}=Bte^{(\alpha+i\beta)t} \tag{5}$$

则

$$\tilde{y}'=Be^{(\alpha+i\beta)t}+B(\alpha+i\beta)te^{(\alpha+i\beta)t}$$

$$\tilde{y}''=2(\alpha+i\beta)Be^{(\alpha+i\beta)t}+(\alpha+i\beta)^2Bte^{(\alpha+i\beta)t}$$

代入方程(4)得

$$2(\alpha+i\beta)Be^{(\alpha+i\beta)t}+(\alpha+i\beta)^2Bte^{(\alpha+i\beta)t}+(p-1)(Be^{(\alpha+i\beta)t}+B(\alpha+i\beta)te^{(\alpha+i\beta)t})+qBte^{(\alpha+i\beta)t}=Ae^{(\alpha+i\beta)t}$$

即

$$[2(\alpha+i\beta)+(p-1)]Be^{(\alpha+i\beta)t}+[(\alpha+i\beta)^2+(p-1)(\alpha+i\beta)+q)Bte^{(\alpha+i\beta)t}=Ae^{(\alpha+i\beta)t}$$

比较系数得

$$B=\frac{A}{2(\alpha+i\beta)+(p-1)}=\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}$$

代入(5)式得(4)式的解为

$$\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}x^{\alpha}\ln x(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x))$$

则它的实部

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}x^{\alpha}\ln x(\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x))\right\}$$

就是原方程(1)式 $x>0$ 时的解。

如果 $x<0$,则用 $x=-e^t$ 所得结果一样,即

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}x^{\alpha}\ln(-x)(\cos(\beta\ln(-x))+i\sin(\beta\ln(-x)))\right\}$$

定理 1 从而得证。　　证毕

当 $\beta=0$ 时,由定理 1 即可得到如下推论。

推论 1　若 $f(x)=Ax^{\alpha}$,则(1)式的特解 $\tilde{y}$ 可由以下公式得到。如果 α 不是特征方程(2)式的根,则 $\tilde{y}=\frac{A}{F(\alpha)}x^{\alpha}$;如果 α 是特征方程(2)式的单根,则 $\tilde{y}=\frac{A}{F'(\alpha)}x^{\alpha}\ln|x|$ 如果 α 是特征方程(2)式的重根,则 $\tilde{y}=\frac{A}{F''(\alpha)}x^{\alpha}\ln^2x$。

例 1　求方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-4x\frac{dy}{dx}+6y=\cos(2\ln x)$$

的特解。

解　因为 2i 不是特征方程

$$F(K)=K(K-1)-4K+6=0$$

的根,因此由定理可以直接得到方程的特解

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{F(2i)}[\cos(2\ln x)+i\sin(2\ln x)]\right\}=\frac{1}{52}[\cos(2\ln x)-5\sin(2\ln x)]$$

例 2　求方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=18x\cos(\ln x)$$

的特解[1]。

解　因为 1 + i 是特征方程

$$F(K)=K(K-1)-K+2=0$$

的单根,因此由定理可以直接得到方程的特解

$$\tilde{y}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{F'(1+i)}x[\cos(\ln x)+i\sin(\ln x)]\right\}=9x\ln x\sin(\ln x)$$

例 3　求方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+4y=x^2$ 的特解。

解　因为 2 是特征方程

$$F(K)=K(K-1)-3K+4=0$$

的二重根,因此由定理可以直接得到方程的特解

$$\tilde{y}=\frac{1}{F''(2)}x^2\ln^2x=\frac{1}{2}x^2\ln^2x$$

2 类型 Ⅱ

设 $f(x)=Ax^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)$,可得到和前面类似的结论,即方程(1)的特解 $\tilde{y}$ 则可由以下定理得到。

定理 2　如果 $\alpha+i\beta$ 不是特征方程(2)的根,则

$$\tilde{y}=\mathrm{Im}\left\{\frac{A}{F(\alpha+i\beta)}x^{\alpha}(\cos(\beta\ln|x|)+i\sin(\beta\ln|x|))\right\}$$

如果 $\alpha+i\beta$ 是特征方程(2)的根,则

$$\tilde{y}=\mathrm{Im}\left\{\frac{A}{F'(\alpha+i\beta)}x^{\alpha}\ln|x|(\cos(\beta\ln|x|)+i\sin(\beta\ln|x|))\right\}$$

证明过程和定理 1 完全类似可得。

注　由于考虑的是二阶常微分方程,因此不可能出现复重根的情况。

例 4　求方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-2y=8\sin(2\ln x)$ 的特解。

解　因为 ±2i 不是特征方程

$$F(K)=K(K-1)+K-2=0$$

的根,因此由定理 2 可以直接得到方程的特解

$$\tilde{y}=\mathrm{Im}\left\{\frac{8}{F(2i)}(\cos(2\ln x)+i\sin(2\ln x))\right\}=\mathrm{Im}\left\{-\frac{4}{3}(\cos(2\ln t)+i\sin(2\ln t))\right\}=-\frac{4}{3}\sin(2\ln x)$$

例 5　求方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+5y=x\sin(2\ln x)$$

的特解。

解　因为 1 ± 2i 是特征方程

$$F(K)=K(K-1)-K+5=0$$

的单根,因此由定理 2 可以直接得到方程的特解

$$\tilde{y}=\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{F'(1+2\mathrm{i})}x\ln x(\cos(2\ln x)+\mathrm{i}\sin(2\ln x))\right\}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{4\mathrm{i}}x\ln x(\cos(2\ln x)+\mathrm{i}\sin(2\ln x))\right\}=$$

$$-\frac{1}{4}x\ln x\cos(2\ln x)$$

3 结论

利用变量变换和复数法,推导出求解一类具有特殊形式时二阶非齐次线性微分方程特解的一般公式,并用理论和实例证明了该算法的正确性。该解法的优点是可以直接套用公式,计算简单,使学生更容易接受。

参考文献:

[1] 王高雄,周之铭,朱思铭,等. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

Wang G X,Zhou Z M,Zhu S M,et al. Ordinary differential equation[M]. Beijing:Higher Education Press,2007.

[2] 丁同仁,李承治. 常微分方程教程[M]. 北京:高等教育出版社,2010.

Ding T R,Li C Z. Tutorial of ordinary differential equation [M]. Beijing:Higher Education Press,2010.

[3] 焦宝聪,王在洪,时红廷. 常微分方程[M]. 北京:清华大学出版社,2008.

Jiao B C,Wang Z H,Shi H T. Ordinary differential equation [M]. Beijing:Tshinghua University Press,2008.

[4] 张伟年,杜正东,徐冰. 常微分方程[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

Zhang W N,Du Z D,Xu B. Ordinary differential equation [M]. Beijing:Higher Education Press,2006.

[5] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京:高等教育出版社,2006.

Dept. of Mathematics of Tongji University. Higher mathematics [M]. Beijing:Higher Education Press,2006.

[6] 庄万. 常微分方程习题解[M]. 济南:山东科学技术出版社,2003.

Zhuang W. Answers to ordinary differential equation exercises [M]. Jinan Shandong:Shangdong Science & Technology Press,2003.

[7] 马慧莉,马如云. 二阶常微分方程边值问题解的存在性[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2005,30(1):22-25.

Ma H L,Ma R Y. The existence of solutions of second order value problem for ordinary differential equation[J]. Journal of Southwest China Normal University:Natural Science,2005,30 (1):22-25.

[8] 张建梅,孙志田,崔宁. 关于 $y''+py'+qy=Ae^{\alpha t}$ 的特解[J]. 高等数学研究,2005,8(3):14-15.

Zhang J M,Sun Z T,Chui N. Amethod to solve particular solution for $y''+py'+qy=Ae^{\alpha t}$[J]. Studies in College Mathematics,2005,8(3):14-15.

The Particular Solutions for Certain Second Order Non-homogeneous Euler Equation

ZHANG Shou-gui

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on variable transformation method, this paper deduces the linear ordinary differential equations with constant coefficients for some kinds of second order Euler equation $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$. The particular solutions of special shape non-homogeneous terms $f(x)=Ax^{\alpha}\cos(\beta\ln|x|)$ and $f(x)=Ax^{\alpha}\sin(\beta\ln|x|)$ are obtained by complex number algorithm, and the general formulas of scheme are given by $\frac{A}{F(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))$ and $\frac{A}{F'(\alpha+\mathrm{i}\beta)}x^{\alpha}\ln|x|(\cos(\beta\ln|x|)+\mathrm{i}\sin(\beta\ln|x|))$. The results of some examples illustrate the correctness of conclusion and practicality of the scheme presented.

Key words: Euler equation; non-homogeneous; particular solution; variable transformation; complex number algorithm

(责任编辑 黄 颖)