DOI :10. 11721/cqnuj20130213

M-矩阵 Hadamard 积最小特征值的新下界*

刘　新, 杨晓英
(四川信息职业技术学院 基础教育部, 四川 广元 628017)

摘要 :关于 M-矩阵 A 与 M-矩阵 B 的逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值的下界问题,近年来受到许多学者的关注与研究。首先介绍相关背景,进而利用 Cauchy-Schwitz 不等式 $(\xi,\eta)^2\leqslant(\xi,\xi)(\eta,\eta)$,矩阵的 Jacobi 迭代矩阵和矩阵特征值与特征向量的关系研究了非奇异 M-矩阵 A 和非奇异 M-矩阵 B 的逆矩阵的 Hadamard 积 $A\circ B^{-1}$ 最小特征值下界问题,得到如下一组新的下界估计式。最后通过算例分析说明,新的下界估计式在一定条件下改进了其他现有结果。

关键词 :M-矩阵 ;Hadamard 积 ;逆矩阵 ;最小特征值 ;下界
中图分类号 :O151. 21　　**文献标志码** :A　　**文章编号** :1672-6693(2013)02-0053-03

N 表示正整数集合, 即 $N=\{1,2,\cdots,n\}$;$\mathbf{R}^{m\times n}$($\mathbf{C}^{m\times n}$)表示 $m\times n$ 阶实(复)矩阵 ;$\rho(P)$表示 $n\times n$ 阶非负矩阵 P 的 Perron 根。将所有非对角元素都为非正实数的 n 阶方阵的集合记为 Z_n。设矩阵 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若 $a_{ij}\geqslant0,i,j\in N$, 则称矩阵 A 为非负矩阵,记 $A\geqslant0$。设矩阵 $A=(a_{ij})\in Z_n$,则 A 可以表示为 $A=\lambda I-B$,其中 $B\geqslant0$,当 $\lambda\geqslant\rho(B)$时,则称 A 为 M-矩阵。特别地,当 $\lambda>\rho(B)$时,称 A 为非奇异 M-矩阵 ;当 $\lambda=\rho(B)$时,称 A 为奇异 M-矩阵。并记为 M_n 为 n 阶 M-矩阵。

令 $A\in M_n$ 是不可约矩阵, 则存在正向量 u, v, 使得

$$Au=\tau(A)u,\ v^{\mathrm T}A=\tau(A)v^{\mathrm T}$$

则向量 u, v 分别被称为矩阵 A 的右 Perron 特征向量和左 Perron 特征向量。设矩阵 $A=(a_{ij})$是 M-矩阵, 令 $N=D-A$, 其中 $D=diag(a_{ii})$。定义 $J_A=D^{-1}N$, 则 J_A 称为矩阵 A 的 Jacobi 矩阵, 且 J_A 是非负矩阵。

对于 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 记

$$\tau(A)=\min\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$$

其中 $\sigma(A)$表示矩阵 A 的谱, $\tau(A)$称为 A 的最小特征值。

设矩阵 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$n\geqslant2$,若存在 n 阶置换矩阵 P,使得 $P^{\mathrm T}AP=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\0&A_{22}\end{bmatrix}$,其中 A_{11} 是 r 阶子矩阵,A_{22} 是 $n-r$ 阶子矩阵,$1\leqslant r<n$,则称矩阵 A 为可约矩阵。反之,则称矩阵 A 为不可约矩阵。

设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$, $c_{ij}=\begin{cases}a_{ii}b_{ii},j=i\\-a_{ij}b_{ij},j\neq i\end{cases}$,记 $A\star B=(c_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$,称为矩阵 A 与 B 的 Fan 积。令 $r\geqslant1$,记 $A^{[r]}=(d_{ij})$,称 $A^{[r]}$ 为 A 的 r 次 Fan 幂,其中

$$d_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}|^r,j=i\\-|a_{ij}|^r,j\neq i\end{cases}$$

显然 $A^{[1]}=A$,$A^{[2]}=A\star A$。

设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$B=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$,用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵,即

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times n}$$

则 $A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积。

1988 年,Fiedler 和 Markham 在文献[1]中得出结论 :如果 A 和 B 都是 M-矩阵,则 $A\circ B^{-1}$ 也是 M-矩阵。关于 $A\circ B^{-1}$ 的最小特征值下界的估计,近年来受到许多学者的关注和研究,得到一系列估计式[2-9]。文献[3]的定理 5. 7. 31 给出如下经典结论

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\tau(A)\min_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_{ii}$$

2008 年,黄荣[4]给出 $\tau(A\circ B^{-1})$的一个更为精确的估计式

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\frac{1-\rho(J_A)\rho(J_B)}{1+\rho^2(J_B)}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_{ii}}{b_{ii}}$$

2010 年,李耀堂等[5]给出了一个比文献[4]中的结果更好的估计式

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{a_{ii}-s_i\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|}{b_{ii}}\right\}$$

* 收稿日期 :2012-06-06　　修回日期 :2012-07-21　　网络出版时间 :2013-03-16 13 :37
资助项目 :广元市科学技术和知识产权局科技计划项目(No. GYST20122733)
作者简介 :刘新,男,助教,硕士,研究方向为矩阵理论与应用,E-mail :liuxin1272@163. com
网络出版地址 :http ://www. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. N. 20130316. 1337. 201302. 53_013. html

本文将继续这一问题的研究,利用 Cauchy-Schwitz 不等式给出 $A\circ B^{-1}$ 最小特征值的一些新的下界估计式,算例表明新下界估计式改进了文献[3-5]中的相应结果。

1 相关引理

引理 1[6] 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$, $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$,则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$$

对 $k=1,2$ 成立。

引理 2[1] 设 $Q\in M_n$ 且为不可约,若存在不为零的非负向量 z 使得 $Qz\geqslant kz$,则 $\tau(Q)\geqslant k$。

引理 3[4] 设 $B=(b_{ij})\in M_n$ 不可约,$B^{-1}=(\beta_{ij})$,令 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$是正向量使得 $J_By=\rho(J_B)y$,则

$$|\beta_{ji}|\leqslant\rho(J_B)\beta_{ii}\frac{y_j}{y_i},\ i\neq j$$

且有:1) $\beta_{ii}\geqslant\dfrac{1}{b_{ii}(1+\rho^2(J_B))}$;2) $\beta_{ii}\geqslant\dfrac{1}{b_{ii}}$。

引理 4[7] 设 $M=(m_{ij})$是 n 阶非奇异 M-矩阵,$N=(n_{ij})$ 是 n 阶非负矩阵,则 $\rho(M^{-1}N)$ 满足

$$\rho(M^{-1}N)\leqslant\max_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n} n_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}}\right\}$$

2 主要结果

定理 1 设 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in M_n$,$B^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant$$

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)\beta_{ii}\}$$

其中 $k=1,2$。

证明 首先假设 $C=A\circ B^{-1}$不可约,则 A,B 是不可约 M-矩阵。从而 $D(A)$强连通,所以 $D(A^{[k]})$也强连通。所以存在 $u^{[k]}=(u_1^k,u_2^k,\cdots,u_n^k)^{\mathrm{T}}>0$ 为 $A^{[k]}$ 的右 Perron 特征向量。记

$$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}>0, v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}>0$$

分别为矩阵 A,B 的右 Perron 特征向量。

因为 $A^{[k]}u^{[k]}=\tau(A^{[k]})u^{[k]}$,则

$$a_{ii}^k u_i^k-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|^k u_j^k=\tau(A^{[k]})u_i^k$$

从而有 $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|^k u_j^k=[a_{ii}^k-\tau(A^{[k]})]u_i^k$。

令 $z=uv$,则 $z>0$,所以对于任意的 $i\in\mathbf{N}$,有

$$(Cz)_i=a_{ii}\beta_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\beta_{ij}z_j=$$

$$a_{ii}\beta_{ii}z_i-\sum_{j\neq i}a_{ij}u_j\beta_{ij}v_j\geqslant a_{ii}\beta_{ii}z_i-$$

$$\left[\sum_{j\neq i}|a_{ij}|^k u_j^k\right]^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{j\neq i}\beta_{ij}^k v_j^k\right]^{\frac{1}{k}}\geqslant a_{ii}\beta_{ii}z_i-$$

$$[a_{ii}^k-\tau(A^{[k]})u_i^k]^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{j\neq i}\rho(J_B)\beta_{ii}^k v_i^k\right]^{\frac{1}{k}}=a_{ii}\beta_{ii}z_i-$$

$$[a_{ii}^k-\tau(A^{[k]})]^{\frac{1}{k}}u_i\cdot(n-1)^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)\beta_{ii}v_i=$$

$$\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)\beta_{ii}\}z_i$$

由引理 2,得

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant$$

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)\beta_{ii}\}$$

对于 $k=1,2$ 成立。

若 C 是可约矩阵,定义 $D=(d_{ij})$为 n 阶置换矩阵,其中

$$d_{12}=d_{23}=\cdots=d_{n-1,n}=d_{n1}=1$$

其余元素为零。对于足够小的 $\varepsilon>0$,$A-\varepsilon D$,$B-\varepsilon D$ 的所有顺序主子式为正。所以当 $\varepsilon>0$ 足够小时,$A-\varepsilon D$,$B-\varepsilon D$ 均为不可约 M-矩阵。用 $A-\varepsilon D$ 与 $B-\varepsilon D$ 分别代替 A 与 B,再令 $\varepsilon\to 0$,则由连续性知结论对 $k=1,2$ 仍然成立。 证毕

对于矩阵 B,若记

$$\frac{\sum_{k\neq j}|b_{jk}|}{b_{jj}}=\sigma_j, j\in\mathbf{N}$$

则由引理 4 和定理 1 可以得到如下结论。

推论 1 设 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in M_n$,$B^{-1}=(\beta_{ij})$,则

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant$$

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\beta_{ii}\max_{i\in\mathbf{N}}\sigma_j\}$$

其中 $k=1,2$。

由引理 3 和定理 1 可得如下推论。

推论 2 设 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in M_n$,$B^{-1}=(\beta_{ij})$。则有:1)

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant$$

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{a_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)}{b_{ii}(1+\rho^2(J_B))}\right\}$$

其中 $k=1,2$。

2)

$$\tau(A\circ B^{-1})\geqslant$$

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{a_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(A^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(J_B)}{b_{ii}}\right\}$$

其中 $k=1,2$。

例 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$,$B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$,则 $A\circ B^{-1}=\begin{bmatrix}0.9 & -0.1\\ -0.2 & 0.8\end{bmatrix}$。易得

$\rho(\boldsymbol{J}_B)=0.408$，$\tau(\boldsymbol{A})=0.764$，$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})=0.7$

由文献[3]中的定理5.7.31可得

$$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\tau(\boldsymbol{A})\min_{1\leqslant i\leqslant n}\beta_{ii}=0.23$$

由文献[4]中的定理9可知

$$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\frac{1-\rho(\boldsymbol{J}_A)\rho(\boldsymbol{J}_B)}{1+\rho^2(\boldsymbol{J}_B)}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{a_{ii}}{b_{ii}}=0.4764$$

利用文献[5]中的定理2.1，有

$$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{a_{ii}-s_i\sum_{j\neq i}|a_{ji}|}{b_{ii}}\right\}=0.444$$

利用本文的定理1，令$k=1$，得

$$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(a_{ii}-\tau(\boldsymbol{A}))]\rho(\boldsymbol{J}_B)\beta_{ii}\}=0.5983$$

令$k=2$，可得

$$\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^2-\tau(\boldsymbol{A}^{[2]}))]^{\frac{1}{2}}\rho(\boldsymbol{J}_B)\beta_{ii}\}=0.6211$$

注 数值算例表明定理1的结果改进了文献[3]的定理5.7.31、文献[4]的定理9和文献[5]的定理2.1的结果。

参考文献：

[1] Fiedler M, Markham T. An inequality for the Hadamard product of an M-matrix and inverse M-matrix[J]. Linear Algebra Appl, 1988, 101: 1-8.

[2] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

[3] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[4] Huang R. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 1551-1559.

[5] Li Y T, Li Y Y, Wang R W, et al. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432: 536-545.

[6] 杜琨. 矩阵Hadamard积和Fan积特征值的界[J]. 华东师范大学学报：自然科学版, 2008(5): 45-50.
Du K. Bounds for eigenvalues of Hadamard product and Fan product of matrices[J]. Journal of East China Normal University: Natural Science, 2008(5): 45-50.

[7] Hu J. The estimation of $\|M^{-1}N\|_\infty$ and the optimally scaled matrix[J]. J Comput Math, 1984(2): 122-129.

[8] Chen S C. A lower bound for the minimum eigenvalue of the Hadamard product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 378: 159-166.

[9] 金升平, 熊方方, 李琼. 矩阵的实特征值为正的条件与判断[J]. 重庆理工大学学报：自然科学版, 2011, 25(1): 117-119.
Jin S P, Xiong F F, Li Q. Conditions and judgements of matrices with positive reay eigenvalues[J]. Journal of Chongqing University of Technology: Natural Science, 2011, 25(1): 117-119.

New Lower Bounds for the Minimum Eigenvalues of Hadamard Product in M-matrices

LIU Xin, YANG Xiao-ying

(Ministry of Basic Education, Sichuan Information Technology College, Guangyuan Sichuan 628017, China)

Abstract: For lower bounds on the minimum eigenvalue of the Hadamard product of M-matrix $\boldsymbol{A}$ and the inverse of M-matrix $\boldsymbol{B}$, it has been concerned with research by many scholars in recent years. This paper first introduces the background, then discusses the lower bounds for the minimum eigenvalue of the Hadamard product $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1}$ of two nonsingular M-matrices $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$ by using Cauchy-Schwitz inequality $(\xi,\eta)^2\leqslant(\xi,\xi)(\eta,\eta)$, Jacobi iterative matrix and the relationship between matrix eigenvalue and eigenvector and obtains the following new lower bounds: $\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))]^{\frac{1}{k}}\rho(\boldsymbol{J}_B)\beta_{ii}\}$, $\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{a_{ii}\beta_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))]\frac{1}{k}\beta_{ii}\max_{j\in\mathbf{N}}\sigma_j\right\}$, and $\tau(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{a_{ii}-[(n-1)(a_{ii}^k-\tau(\boldsymbol{A}^{[k]}))]\frac{1}{k}\rho(\boldsymbol{J}_B)}{b_{ii}(1+\rho^2(\boldsymbol{J}_B))}\right\}$. Finally, the given numerical example shows that the estimating formula of the bound improves several existing results in some cases.

Key words: M-matrix; Hadamard product; inverse matrix; minimum eigenvalue; lower bounds

（责任编辑 黄 颖）