2013 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2013
第 30 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20130214

准模糊图拟阵基的性质*

夏 军，吴德垠，陈娟娟
(重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331)

摘要：本文主要研究准模糊图拟阵模糊基的一些重要性质。通过模糊拟阵的初等模糊集方法、导出拟阵序列法和基交换法等方法，得到了若导出拟阵所含基的个数都相同，则这个准模糊图拟阵是闭正规模糊拟阵；得出了用初等模糊集描述的准模糊图拟阵模糊基的结构定理，即存在数组 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}$，使得 $\forall\mu\in\Theta$，$\mu=\bigvee_{e_{i_{j_k}}\in\mathrm{supp}\,\mu}\omega(\{e_{i_{j_k}}\},\lambda_{j_k})$；找到了准模糊图拟阵模糊基与导出拟阵序列的基的一一对应关系；最后在参考文献[3]的基础上，得到了结果更强的准模糊图拟阵模糊基交换定理——准模糊图拟阵模糊基对称交换定理，即若 Θ 是准模糊图拟阵的模糊基集，$u_1,u_2\in\Theta$，则对任意的 $e\in\mathrm{supp}\,u_1$，都有 $e'\in\mathrm{supp}\,u_2$，使得 $(u_1\backslash e)\parallel_{u_2}e'\in\Theta$，$(u_2\backslash e')\parallel_{u_1}e\in\Theta$。

关键词：拟阵；基；模糊拟阵；模糊基；准模糊图拟阵；基交换定理；基对称交换定理

中图分类号：O157；O159 文献标志码：A 文章编号：1672-6693(2013)02-0056-04

1 基本概念和结论

首先介绍有关拟阵的概念。

定义 1[1] 设 E 是有限集，I 是 E 的子集族。若 I 满足下列条件：

1) $\Phi\in I$；

2) 若 $X\in I$，$Y\subseteq X$，则 $Y\in I$；

3) 若 $X,Y\in I$，$|X|<|Y|$，则有 $W\in I$，使 $X\subset W\subseteq X\cup Y$ 则称对偶 (E,I) 为 E 上的一个拟阵记为 $M=(E,I)$。

任 $X\subseteq E$，若 $X\in I$，则称 X 为 M 的独立集，否则称为 X 的相关集。M 的极大独立集，称为 M 的基。M 的全部基组成的集合，称为 M 的基集，记为 B。M 的极小相关集，称为 M 的圈。若 $O\subseteq E$ 是 M 的圈，且 $|O|=1$，则称 O 为 M 的环。

定理 1[1] 设 $M=M(E,I)$，是一拟阵，$B_1\neq B_2$ 是 M 的基，则对任意的 $e\in B_1$，存在 $e'\in B_2$，使得 $(B_1\backslash\{e\})\cup\{e'\}$ 和 $(B_2\backslash\{e'\})\cup\{e\}$ 是 M 的基。

下面介绍几个有关模糊数学的概念。

设 E 是一个集合，则 E 上的模糊集 μ 是一个映射 $\mu:E\to[0,1]$。E 上模糊集的全体记为 $F(E)$。$\forall\mu,\nu\in F(E)$，有下列概念和记法：

$\mathrm{supp}\,\mu=\{x\in E|\mu(x)>0\}$ 称为 μ 的支撑集。

若 $\mathrm{supp}\,\mu=\Phi$，则称为模糊空集，仍记为 Φ。

$$m(\mu)=\inf\{\mu(x)|x\in\mathrm{supp}\,\mu\}$$

$$R^+(\mu)=\{\mu(x)|\mu(x)>0\}$$

$C_r(u)=(u)_r=\{x\in E|\mu(x)\geqslant r\}$（其中 $r\in[0,1]$），称为 μ 的 r-水平割集。

$|\mu|=\sum_{x\in E}\mu(x)$ 称为模糊集 μ 的势。

$\mu\wedge\nu=\min\{\mu,\nu\}$ 称为 μ 和 ν 的交，$\mu\vee\nu=\max\{\mu,\nu\}$ 称为 μ 和 ν 的并。

任意的 $x\in E$，有 $\mu(x)\leqslant\nu(x)$，则称模糊集 μ 被包含于模糊集 ν，记为 $\mu\leqslant\nu$。如果 $\mu\leqslant\nu$ 且存在 $x\in E$ 使 $\mu(x)<\nu(x)$，则称模糊集 μ 被真包含于模糊集 ν，记为 $\mu<\nu$。

任意 $x\in E$，记 $\mu\backslash\backslash x$ 表示模糊集：

$$(\mu\backslash\backslash x)(y)=\begin{cases}\mu(y), & y\in E\backslash x\\ 0, & y=x\end{cases}$$

任意 $x\in E$，记 $\mu\parallel_\nu x$ 表示模糊集：

$$(\mu\parallel_\nu x)(y)=\begin{cases}\mu(y), & y\in E\backslash x\\ \nu(x), & y=x\end{cases}$$

任 $X\subseteq E$，任 $a\in(0,1)$，$\omega(X,a)$ 表示模糊集：

$$\omega(X,a)(x)=\begin{cases}a, & x\in X\\ 0, & x\notin X\end{cases}$$

称为 X 上的水平为 a 的初等模糊集。

最后，介绍几个模糊拟阵概念。

定义 2[2] 设 E 是一个有限集，$\Psi\in F(E)$ 是一个满足下列条件的非空模糊集族：

* 收稿日期：2012-07-23 网络出版时间：2013-03-16 13:37
作者简介：夏军，男，硕士研究生，研究方向为模糊拟阵，E-mail：xiajun069050442@126.com；通讯作者：吴德垠，E-mail：wdy@cqu.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130316.1337.201302.56_014.html

1) 若 $\mu\in\Psi,\nu\in F(E),v\leqslant\mu$,则 $\nu\in\Psi$;

2) 若 $\mu,\nu\in\Psi,|\mathrm{supp}\,\mu|<|\mathrm{supp}\,\nu|$,则存在 $\omega\in\Psi$ 使

a) $\mu<\omega\leqslant\mu\vee\nu$

b) $m(\omega)\geqslant\min\{m(\mu),m(\nu)\}$

则称对偶 $\Pi=(E,\Psi)$ 是 E 上的模糊拟阵,Ψ 称为 Π 的独立模糊集族。若 $\mu\in F(E)$,但 $\mu\notin\Psi$ 则称 μ 为 Π 的模糊相关集。Π 的极大模糊独立集,称为 Π 的模糊基。

$\forall r\in(0,1]$,令

$$I_r=\{(u)_r\mid\forall u\in\Psi\}$$

易证:$M_r=(E,I_r)$ 是 E 上的一个拟阵,称为 Π 的导出拟阵。

定义 3[2]　设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是模糊拟阵,则有限序列 $0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$,使

1) $\forall s,t\in(r_{i-1},r_i)(i=1,2,\cdots,n)$,都有 $I_s=I_t$。

2) $\forall s,t\in(r_{i-1}<s<r_i<t<r_{i+1})(i=1,2,\cdots,n-1)$,则 $I_s\supset I_t$。

3) 若 $r_n<1$,则 $\forall s\in(r_n,1]$,都有 $I_s=\varnothing$。

称 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为 Π 的基本序列。对任意的 $i(=1,2,\cdots,n)$,令

$$r_i'=\frac{1}{2}(r_{i-1}+r_i)$$

$$M_{r_i'}=(E,I_{r_i'})$$

得拟阵列 $M_{r_1'}\supset M_{r_2'}\supset\cdots\supset M_{r_n'}$,则称为 Π 的导出拟阵列。若对任意的 $i(=1,2,\cdots,n)$ 和 $\forall r\in(r_{i-1},r_i]$,有 $I_r=I_{r_i}$,则称 Π 为闭模糊拟阵,此时 $M_{r_i'}=M_{r_i}$。

定义 4[3]　设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是模糊拟阵,$M_n\subset\cdots\subset M_2\subset M_1$ 为其导出拟阵序列。若 $C\subseteq E$ 是 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的非环圈,则 C 也是 M_{r_1} 的非环圈,那么称 Π 是圈好模糊拟阵。

定义 5[3]　设 Π 为模糊拟阵,Θ 是 Π 的模糊基集。若任 $u_1,u_2\in\Theta$,都有 $u_1=u_2\Leftrightarrow\mathrm{supp}\,u_1=\mathrm{supp}\,u_2$,则称 Π 是基好模糊拟阵。

定义 6[4]　设 $M=(E,\Psi)$ 是一个模糊拟阵,$r_0<r_1<\cdots<r_n$ 为 M 的基本序列,如果对任意的 $r_i<r_j$ 且 B 是 (E,I_{r_i}) 的基,有 (E,I_{r_j}) 的基 A,使得 $A\subseteq B$,则称 M 是正规的。

定义 7[3]　称闭的圈好模糊拟阵为准模糊图拟阵。

定理 2[3]　设 $\Pi=(E,\Psi)$ 是闭模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 是基本序列,$M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列。$u\in F(E)$,则 u 是 Π 的模糊基 $\Leftrightarrow\mathrm{supp}\,u$ 是 M_{r_1} 的基,$(u)_{r_i}$ 是 $\mathrm{supp}\,u$ 在 M_{r_i} 中的极大独立子集,而且 $R^+(u)\subseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$。

定理 3[3]　设 $M=(E,\Psi)$ 是闭模糊拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 是基本序列,$M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列,Θ 为其模糊基集,则下列论述等价:

1) M 是基好的。

2) M_{r_1} 的每个基 B 在 $M_{r_i}(i=2,3,\cdots,n)$ 中的极大独立子集唯一。

3) M_{r_1} 的每个基 B 不含 $M_{r_i}(i=2,3,\cdots,n)$ 的非环圈。

4) 任 $u_1,u_2\in\Theta$,任 $e\in\mathrm{supp}\,u_1\cap\mathrm{supp}\,u_2$,都 $u_1(e)=u_2(e)$。

5) 是圈好的。

2 准模糊图拟阵模糊基的性质

有例子说明,闭正规模糊拟阵不一定是准模糊图拟阵,准模糊图拟阵也不一定是闭正规模糊拟阵,还有模糊拟阵既是准模糊图拟阵又是闭正规模糊拟阵。目前,还没有文章描述准模糊图拟阵与闭正规模糊拟阵之间的必然联系。仔细分析准模糊图拟阵的导出拟阵列,找到一个准模糊图拟阵是闭正规模糊拟阵的一个充分条件。

定理 4　若在准模糊图拟阵的导出拟阵序列中,所有导出拟阵所含基的个数都相同,则这个准模糊图拟阵是闭正规模糊拟阵。

证明　设 $M=M(E,I)$ 是准模糊图拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant1$ 为其基本序列,$M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$ 为其导出拟阵序列。对任意的 $r_i<r_j$,若所有的导出拟阵有相同个数的基,不妨设有 m 个基。记 M_{r_i} 的所有基为 $A_k(k=1,2,\cdots,m)$,M_{r_j} 的所有基为 $B_k(k=1,2,\cdots,m)$。同时,由准模糊图拟阵的定义知,M 是闭模糊拟阵。下面证明 M 是正规的。

对任意 $k(k=1,2,\cdots,m)$,都有 $B_k\in I_{r_j}$,也有 $B_k\in I_{r_i}$,那么 B_k 可增广为 M_{r_i} 的一个基 $A_{k'}$,使得 $B_k\subseteq A_{k'}$。对任意的 $k,l\in\{1,2,\cdots,m\}$,若 $B_k\subseteq A_{k'},B_l\subseteq A_{l'}$ ($A_{l'}$ 的取法与 $A_{k'}$ 类似),$B_k\neq B_l$,则 $A_{k'}\neq A_{l'}$。若不然,假设存在 $B_k,B_l\subseteq A_{k'}=A_{l'}$,因为 B_k,B_l 都是 M_{r_j} 的基,则 $B_k\cup B_l$ 含有 M_{r_j} 的非环圈 C。由圈好性知 C 是 M_{r_1} 的圈,而 $C\subseteq B_k\cup B_l\subseteq A_{k'}\in I_{r_i}\subseteq I_{r_1}$,这与模糊独立集的定义矛盾。

所以 M_{r_i} 的基与 M_{r_j} 的基的上述对应关系是一一对应的关系,即对任意的 M_{r_i} 的基 A_k 存在唯一的一个 M_{r_j} 的基 $B_{k'}$,使得 $B_{k'}\subseteq A_k$。

故模糊拟阵 M 是闭正规模糊拟阵。　　证毕

推论 1　设 $M=(E,I)$ 是准模糊图拟阵,若导出拟阵 M_{r_1} 中没有圈,则准模糊图拟阵 M 是闭正规的。

证明　若 $M=(E,I)$ 是准模糊图拟阵,导出拟阵

M_{r_1}中没有圈,则M_{r_1}中有唯一的基,显然M_{r_i}($i=2,3,\cdots,n$)中也有且仅有一个基,若不然,假若M_{r_i}中有两个基B_1,B_2,则$B_1\cup B_2$是M_{r_i}的相关集,存在M_{r_i}的圈$C\subseteq B_1\cup B_2$,由圈好性,C是M_{r_1}的圈,矛盾。所以,所有的导出拟阵的基的个数相等,由定理4知准模糊图拟阵M是闭正规的。 证毕

为了更好地认识准模糊图拟阵的模糊基,作者研究了利用初等模糊集构造准模糊图拟阵模糊基的方法。这个方法可以让作者通过有限个元素及其相对应的数来构造准模糊图拟阵的全部模糊基。

定理5(准模糊图拟阵模糊基结构定理) 设$M=(E,I)$为准模糊图拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$为其基本序列,$\Theta$为其模糊基集,$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。

令$A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_l}\}=\{e\in E\mid$有$\mu\in\Theta$,使$e\in\operatorname{supp}\mu\}$,则有数组$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}\subseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,使$\forall\mu\in\Theta$,都$\mu=\bigvee_{e_{i_{j_k}}\in\operatorname{supp}\mu}\omega(\{e_{i_{j_k}}\},\lambda_{j_k})$(数组$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}$可能是多重集,即可能有$i,j=1,2,\cdots,l,i\neq j$,但$\lambda_i=\lambda_j$)。

证明 $\forall e_{i_j}\in A(j=1,2,\cdots,l)$,有$\mu\in\Theta$,使$e_{i_j}\in\operatorname{supp}\mu$。令$\lambda_j=\mu(e_{i_j})$,由此得到数组$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}$。又由定理2知$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l\}\subseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$。

再证:$\forall e_{i_j}\in A(j=1,2,\cdots,l)$,$\forall\mu\in\Theta$,如果$e_{i_j}\in\operatorname{supp}\mu$,则$\mu(e_{i_j})=\lambda_j$。否则,如果有$\mu,\nu\in\Theta$,$e_{i_j}\in\operatorname{supp}\mu$,$e_{i_j}\in\operatorname{supp}\nu$,使$\mu(e_{i_j})\neq\nu(e_{i_j})$。但由$M$是准模糊图拟阵,定理3和$e_{i_j}\in\operatorname{supp}\mu\cap\operatorname{supp}\nu$知,矛盾。

由模糊集的结构知:$\forall\mu\in\Theta$,都有

$$\mu=\bigvee_{e_{i_{j_k}}\in\operatorname{supp}\mu}\omega(\{e_{i_{j_k}}\},\mu(e_{i_{j_k}}))=\bigvee_{e_{i_{j_k}}\in\operatorname{supp}\mu}\omega(\{e_{i_{j_k}}\},\lambda_{j_k})$$

证毕

为了进一步讨论准模糊图拟阵的基交换性质,下面探讨准模糊图拟阵的模糊基与其导出拟阵M_{r_1}的基的关系。

定理6(准模糊图拟阵模糊基与导出拟阵序列基的关系) 设$M=(E,I)$为准模糊图拟阵,$0=r_0<r_1<\cdots<r_n\leqslant 1$为其基本序列,$M_{r_1}\supset M_{r_2}\supset\cdots\supset M_{r_n}$为其导出拟阵序列,则对$M_{r_1}$的任意基$B_1$,存在唯一的$M$的模糊基$u$,使得$\operatorname{supp}u=B_1$。

证明 由M是准模糊图拟阵,由定理3知B_1在$M_{r_i}(i=2,3,\cdots,n)$中有唯一的极大独立子集B_i。下面用数学归纳法证明$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n$。

显然$B_2\subset B_1$,对任意B_i,若存在$e\in B_i\backslash B_{i-1}$,考虑$B_{i-1}\cup\{e\}$。若$B_{i-1}\cup\{e\}$为$M_{r_{i-1}}$的独立集,则与$B_{i-1}$的极大性矛盾。若$B_{i-1}\cup\{e\}$为$M_{r_{i-1}}$的相关集,则存在非环圈$C\subset M_{r_{i-1}}$,由圈好性知$C\subset M_{r_1}$,又$C\subset B_{i-1}\cup\{e\}\subset B_1$,矛盾。所以,对任意的$i$,有$B_i\subset B_{i-1}$。即$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_n$。

记$u=\bigvee_{i=1}^{n}\omega(B_i,r_i)$,则$\operatorname{supp}u=B_1$是$M_{r_1}$的基,$(u)_{r_i}=B_i$是$\operatorname{supp}u$在$M_{r_i}$中的极大独立子集,而且$R^+(u)\subseteq\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$。由定理2知,$u$是$M$的模糊基。假若还存在$u'$是$M$的模糊基,使得$\operatorname{supp}u'=B_1$,则$\operatorname{supp}u'=\operatorname{supp}u$,由基好性知$u=u'$。 证毕

推论2 准模糊图拟阵的基与其导出拟阵M_{r_1}的基一一对应。

证明 设$M=(E,I)$为准模糊图拟阵,对M的任意基u,由定理2知,存在唯一的M_{r_1}的基$\operatorname{supp}u$与之对应,由定理6,对M_{r_1}的任意基B_1,存在唯一的M的模糊基u使得$\operatorname{supp}u=B_1$。推论得证。 证毕

准备工作已经完成,接下来研究准模糊图拟阵模糊基的对称交换问题。

定理7(准模糊图拟阵模糊基的对称交换定理) 设$M=(E,I)$是准模糊图拟阵,E为有限集,Θ是准模糊图拟阵的模糊基集,$u_1,u_2\in\Theta$,则对任意的$e\in\operatorname{supp}u_1$,都有$e'\in\operatorname{supp}u_2$,使得$(u_1\backslash e)\parallel_{u_2}e'\in\Theta$,$(u_2\backslash e')\parallel_{u_1}e\in\Theta$。

证明 若$u_1,u_2\in\Theta$,则$\operatorname{supp}u_1$和$\operatorname{supp}u_2$都是M_{r_1}的基,由定理1知,对任意的$e\in\operatorname{supp}u_1$,存在$e'\in\operatorname{supp}u_2$,使得

$$X_1=(\operatorname{supp}u_1\backslash\{e\})\cup\{e'\}$$
$$X_2=(\operatorname{supp}u_2\backslash\{e'\})\cup\{e\}$$

都是M_{r_1}的基。

若$e=e'$,则$e=e'\in\operatorname{supp}u_1\cap\operatorname{supp}u_2$,因此$\mu_1(e)=\mu_2(e)$。

$(u_1\backslash e)\parallel_{u_2}e'=u_1\in\Theta$和$(u_2\backslash e')\parallel_{u_1}e=u_2\in\Theta$,定理得证。 证毕

若$e\neq e'$,由定理6知,有$v_1\in\Theta$,使得

$$\operatorname{supp}v_1=X_1$$

由定理3和定理5知

$$v_1(x)=\begin{cases}u_1(x), & x\in\operatorname{supp}u_1\backslash\{e\}\\ u_2(x), & x=e'=(u_1\backslash e)\parallel_{u_2}e'\\ 0, & x=e\end{cases}$$

同理,存在$v_2\in\Theta$,使得$\operatorname{supp}v_2=X_2$,由定理3和定理5知

$$v_2(x)=\begin{cases}u_2(x), & x\in\operatorname{supp}u_2\backslash\{e'\}\\ u_1(x), & x=e=(u_2\backslash e')\parallel_{u_1}e\\ 0, & x=e'\end{cases}$$

定理得证。 证毕

参考文献：

[1] 陈桂真,陈庆华. 拟阵[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1991:192-193.
Chen G Z, Chen Q H. Matroids [M]. Changsha: NUDT Publish House, 1991:192-193.

[2] Goetschel R J, Voxman W. Fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1988, 27:291-302.

[3] 吴德垠. 准模糊图拟阵[J]. 重庆大学学报:自然科学版, 1996, 19(3).
Wu D Y. Quasi-Fuzzy graph matriods [J]. Journal of Chongqing University: Natural Science Edition, 1996, 19(3).

[4] Goetschel R J, Voxman W. Bases of fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31:253-261.

[5] 汪定国. 诣零矩阵和拟阵[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2005, 22(3):58-59.
Wang D G. Nil-Matrices and matriods [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2005, 22(3):58-59.

[6] 汪定国. 关联矩阵和拟阵[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版, 2003, 20(1):13-21.
Wang D G. Incidence matrices and matriods [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition, 2003, 20(1):13-21.

[7] 吉庆兵. 拟阵基图与欧拉图[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版, 1996, 17(4):71-72.
Ji Q B. Basis graphs of matriods and euler graphs [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science Edition, 1996, 17(4):71-72.

[8] Welsh D J A. Matroid theory [M]. London: Academic Press, 1976.

[9] Goetschel R, J, Voxman W. Bases of fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31:253-261.

[10] 李永红,刘宴兵,石庆喜. 模糊圈的秩[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2009, 34(3):21-23.
Li Y H, Liu Y B, Shi Q X. Rank fuzzy circuits [J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition, 2009, 34(3):21-23.

The Properties of Bases of Quasi-Fuzzy Graph Matriods

XIA Jun, WU De-yin, CHEN Juan-juan
(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In the paper, we mainly study the some important properties of fuzzy bases of quasi-fuzzy graph matriod. With the help of methods of element fuzzy sets, induced matroid sequences, and bases-exchang, we found that if there is the same number of bases among indeced matroids, quasi-fuzzy graph matroids is closed regular matroids. we have also obtained the structure-theorm of bases of quasi-fuzzy graph matroids, there is a set $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_l\}$, for $\forall \mu \in \Theta$, $\mu = \bigvee_{e_{i_{j_k}} \in \operatorname{supp} \mu} \omega(\{e_{i_{j_k}}\}, \lambda_{j_k})$, that is, for arbitrary base of quasi-fuzzy graph matroids, we can use elementary fuzzy sets to describe it. and the one to one correspondence between bases of quasi-fuzzy graph matroids and bases of indeced matroids sequences; Bases on the paper [3] of References, we have gained the symmetrical exchange-theorem of bases of quasi-fuzzy graph matroid. If Θ is fuzzy bases set of quasi-fuzzy graph matroids, u_1, $u_2 \in \Theta$, then for arbitrary $e \in \operatorname{supp} u_1$, there is $e' \in \operatorname{supp} u_2$, so that $(u_1 \setminus e) \parallel_{u_2} e' \in \Theta$, $(u_2 \setminus e') \parallel_{u_1} e \in \Theta$. This conclusion is better than the exchange-theorem of bases of quasi-fuzzy graph matroid in the Third Referrence.

Key words: matroids; fuzzy matroids; fuzzy bases; quasi-fuzzy graph matroid; the exchange-theorem of bases; the symmetrical exchange-theorem of bases

（责任编辑 游中胜）