DOI:10.11721/cqnuj20130310

有限群的 λ-可补充极小子群*

李金宝，余大鹏，陈顺民
(重庆文理学院 数学系，重庆 402160)

摘要:根据子群的性质来研究群的性质和结构是群论研究中的一个比较热门的课题。本文主要研究了 λ-可补充子群对有限群结构的影响，即一个群的子群的 λ-可补充性可以确定这个群本身的 p-幂零性和超可解性。通过考察群的极小子群或者 4 阶循环子群的 λ-可补充性，本文给出了一个群是超可解群的充分必要条件：一个群 G 是超可解的当且仅当 G 有一个正规子群 E 使得 G/E 是超可解的，且对 E 的每个非循环的 Sylow 子群 P，P 的每个在 G 中无超可解补充的极小子群或者 4 阶循环子群 H(如果 P 是一个非交换 2-群，且 $H\not\subseteq Z_{\infty}(G)$)在 G 中是 λ-可补充的。在对群的 p-幂零性给出了一个新刻画的基础上，应用极小阶反例法和数学归纳法证明了该充要条件。该结论推广并统一了部分已有文献的研究成果。

关键词:有限群；极小子群；λ-可补充子群；超可解群；p-幂零群
中图分类号:O152.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2013)03-0052-03

本文中所有群都是有限群。在群论研究中，对子群的广义置换性和广义可补性的研究是一个有趣的课题。设 H 是一个群 G 的子群。称 H 在 G 中是可置换的(或拟正规的)，如果 H 与 G 的任一子群都是可置换的。如果 H 与 G 的每个 Sylow 子群是可置换的，那么称 H 是 G 一个 S-可置换(或 S-拟正规)子群。近年来，很多作者推广了上述概念。Ballester 和 Pedraza-Aguilera[1] 称 H 是 G 的一个 S-拟正规嵌入子群，如果对 $\pi(H)$ 的任一素因子 p，H 的某个 Sylow p-子群是 G 的某个 S-拟正规子群的 Sylow p-子群。Skiba[2] 引入了弱 S-可补充子群的概念，称一个群 G 的子群 H 在 G 中是弱 S-可补充的，如果 G 有一个子群 T 使得 $G=HT$ 且 $H\cap T\leqslant H_{sG}$，其中 H_{sG} 是由 H 的那些在 G 中 S-可置换的子群所生成的子群。Li 和 Chen[3] 对子群的 S-拟正规嵌入性和弱 S-可补充性作了进一步的推广，引入了 λ-可补充子群这一新概念。设 H 是一个群 G 的子群，称 H 在 G 中是 λ-可补充的，如果 G 有一个子群 T 使得 $G=HT$ 且 $H\cap T\leqslant H_{SE}$。在这个定义中，H_{SE} 是由 H 的那些在 G 中 S-拟正规嵌入的子群的生成的子群。利用这一新概念，文献[3]通过考虑某些特殊子群的 Sylow 子群的极大子群的 λ-可补充性，对群的 p-超可解性给出了一些新的描述。

本文将通过考察极小子群的 λ-可补充性，对群的超可解性给出一个新的刻画。文中所涉及的其他概念和符号都是标准的[4]。

1 预备知识

在证明主要结论之前，先给出下面的引理，它描述了 λ-可补充子群的一些基本性质。

引理 1[3] 设 G 是一个群且 $H\leqslant K\leqslant G$，则

1) 假设 H 是 G 的一个正规子群，那么 K/H 在 G/H 中 λ-可补充当且仅当 K 在 G 中 λ-可补充；

2) 如果 H 在 G 中是 λ-可补充的，那么 H 在 K 中也是 λ-可补充的；

3) 假设 H 是 G 的一个正规子群且 N 是 G 的一个满足条件 $(|N|,|H|)=1$ 的 λ-可补充子群，那么 NH/H 在 G/H 是 λ-可补充的。

引理 2[5] 设 G 是一个群，p 是 G 的阶的最小素因子，且 P 是 G 的一个 Sylow p-子群。如果 P 的任一极大子群在 G 中有 p-幂零补充，那么 G 是 p-幂零的。

引理 3 假设 U 是一个群 G 的 S-拟正规嵌入子群，如果 $U\leqslant O_p(G)$，那么 U 在 G 中是 S-可置换的。

证明 易见 U 与 G 的所有 Sylow p-子群是可置换的。设 Q 是 G 的任一 Sylow q-子群，这里 $q\neq p$。由假设，U 是 G 的某个 S-可置换子群 K 的 Sylow p-子群。那么 U 是群 KQ 的一个 Sylow p-子群。因为 U 在 G 中是次正规的，所以 U 在 KQ 中也是次正规的，从而 U 在 KQ 中是正规的。因此 $UQ=QU$。这样就证明了 U 在 G 中是 S-可置换的 G。 证毕

* **收稿日期:**2012-09-27 **修回日期:**2012-12-20 **网络出版时间:**2013-05-20 18:04
资助项目:国家自然科学基金(No. 11271301; No. 11171364; No. 11001226)；重庆文理学院科学研究基金(No. R2012SC21; No. Z2012SC25)
作者简介:李金宝，男，讲师，博士，研究方向为代数学、群论，E-mail: leejinbao25@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.52_009.html

2 主要结论

定理 1　设 p 是一个群 G 的阶的最小素因子，P 是 G 的一个 Sylow p-子群，那么 G 是 p-幂零的当且仅当 P 的在 G 中无超可解补充的极小子群或者 4 阶循环子群 H（如果 P 是非交换 2-群且 $H\not\subseteq Z_\infty(G)$）在 G 中是 λ-可补充的。

证明　必要性是显然的，下面考虑充分性。假设充分性不成立，且设 G 是一个极小阶反例。由于 G 是一个非 p-幂零群，G 有一个极小非 p-幂零子群 A。由文献[4,6]知，A 有下述性质：1) $A=A_pA_q$，其中 $p\neq q$，$A_p=A^{\mathfrak{N}}$ 是 A 的 Sylow p-子群，A_q 是 A 的一个 Sylow q-子群；2) $A_p/\Phi(A_p)$ 是 A 的主因子；3) $\exp(A_p)=p$ 或者 4，如果 $p=2$；4) $\Phi(A_p)=A_p\cap Z_\infty(A)$；5) 如果 A_p 是交换的，那么 A_p 是初等交换的。

不失一般性，假设 A_p 包含在 P 中，如果 A_p 的幂指数为 p，那么由假设可知 $A_p\leqslant Z_\infty^{\mathfrak{U}}(A)$。由于 p 的极小性，所以 $A_p\leqslant Z_\infty(A)$，这与上述性质 4) 矛盾。所以根据性质 3)、4) 可知，$p=2$ 且 A_2 是一个非交换 2-群且幂指数为 4。设 $W/\Phi(A_2)$ 是 $A_2/\Phi(A_2)$ 的任一极小子群。设 $x\in W\backslash\Phi(A_2)$ 且 $H=\langle x\rangle$，那么 $|H|=2$ 或者 4，且 $W/\Phi(A_2)=H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$。如果 H 在 G 中有一个超可解补充，那么 H 在 A 中有一个 2-幂零补充。由引理 2 可知 $A/\Phi(A_2)$ 是 2-幂零的，从而 A 是 2-幂零的。这一矛盾表明，对于 $A_2/\Phi(A_2)$ 的某一极小子群 $W/\Phi(A_2)=H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$，$H$ 在 G 中无超可解补充。根据假设，$H\subseteq Z_\infty(G)\cap A=Z_\infty(A)$ 或者 H 在 G 中是 λ-可补充的。如果 $H\subseteq Z_\infty(A)$，那么 $\Phi(A_2)\neq A_2\cap Z_\infty(A)$，这与性质 4) 相矛盾。因此 H 在 G 中是 λ-可补充的。由引理 1 知 A 有一个子群 T 使得 $A=HT$ 且 $H\cap T\leqslant H_{SE}$。根据引理 3 知 H_{SE} 在 A 中是 S-可置换的。如果 $H_{SE}=H$，那么，因为 H 在 A 中是次正规的且 H 是 HA_q 的一个 Sylow 2-子群，所以 A_q 正规化 H。即 $H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 被 $A_q\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 正规化。另外，$A_2/\Phi(A_2)$ 也正规化 $H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$。所以 $H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 在 $A/\Phi(A_2)$ 中是正规的。于是 $A_2=H$，这意味着 A 是 2-幂零的[6]，矛盾。因而 $H_{SE}<H$。由此可知 $T\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 是 $A_2/\Phi(A_2)$ 的真子群。由于

$$A/\Phi(A_2)=(H\Phi(A_2)/\Phi(A_2))/(T\Phi(A_2)/\Phi(A_2))$$

且 $H\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 的阶为 2，所以 $T\Phi(A_2)/\Phi(A_2)$ 在 $A/\Phi(A_2)$ 中的指数为 2，所以 $T\Phi(A_2)$ 在 A 中是正规的。由 G 的选取可知，$T\Phi(A_2)$ 是 2-幂零的。因此，A 是 2-幂零的。矛盾。　　证毕

定理 2　设 E 是一个群 G 的正规子群使得 G/E 是超可解的，假设对 E 的每个非循环的 Sylow 子群 P，P 的每个在 G 中无超可解补充的极小子群或者 4 阶循环群 H（如果 P 是一个非交换 2-群，且 $H\not\subseteq Z_\infty(G)$）在 G 中是 λ-可补充的，那么 G 是超可解的。

证明　假设结论不真，且设 G 是一个满足 $|G|+|E|$ 为极小的反例。那么 $E\neq 1$，设 p 是 $|E|$ 的最小素因子，那么定理 1 表明 E 是 p-幂零的。设 A 是 E 的正规 p-补，那么 A 在 G 中是正规的。假设 $A\neq 1$。根据引理 1 知，$(G/A,E/A)$ 满足条件假设。所以由 G 的选取可知 G/A 是超可解的。这样 (G,A) 也满足条件假设。由 (G,E) 的极小性可知 G 是超可解的，矛盾。因而 E 是一个 p-群，且是一个非循环 p-群。

现根据条件假设及引理 1 可知 $G^{\mathfrak{U}}=E$。设 M 是 G 的任一不包含 E 的极大子群。那么

$$M/M\cap E\cong ME/E=G/E$$

是超可解的。由引理 1 可知 $(M,M\cap E)$ 满足条件假设，从而由 G 的选取可知 M 是超可解的。这样，G 的任一不包含 E 的极大子群是超可解的。根据文献[4]，G 有以下性质：

1) $G^{\mathfrak{U}}/\Phi(G^{\mathfrak{U}})$ 是 G 的一个反中心主因子；

2) $\Phi(G^{\mathfrak{U}})=G^{\mathfrak{U}}\cap\Phi(G)\subseteq Z(\Phi(G^{\mathfrak{U}}))$ 且 $\Phi(G)\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$；

3) $G^{\mathfrak{U}}$ 的幂指数为 p 或者 4（如果 $p=2$）。另外，如果 $G^{\mathfrak{U}}$ 是交换的，那么 $G^{\mathfrak{U}}$ 是初等交换的。

如果 $G^{\mathfrak{U}}$ 的幂指数为 p，那么 $G^{\mathfrak{U}}\leqslant Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G)$，这与性质 1) 矛盾。因此 $p=2$，$G^{\mathfrak{U}}$ 是非交换的且 $G^{\mathfrak{U}}$ 的幂指数为 4。记 $\Phi=\Phi(G^{\mathfrak{U}})$，设 L/Φ 是 $G^{\mathfrak{U}}/\Phi$ 的一个极小子群且是 G/Φ 的某个 Sylow p-子群的正规子群，那么 $L/\Phi=\langle x\rangle\Phi/\Phi$，这里 $x\in L\backslash\Phi$ 且 $|x|=2$ 或者 4。如果 $\langle x\rangle\subseteq Z_\infty(G)$，那么 $G^{\mathfrak{U}}/\Phi\subseteq Z_\infty^{\mathfrak{U}}(G/\Phi)$，矛盾。设 T 是 $\langle x\rangle$ 在 G 中的任一补充，那么，由于 $G^{\mathfrak{U}}/\Phi$ 是初等交换群，则

$$G^{\mathfrak{U}}/\Phi\cap T\Phi/\Phi=(G^{\mathfrak{U}}\cap T)\Phi/\Phi$$

在 G/Φ 中是正规的。因此，由性质 1) 可知 $(G^{\mathfrak{U}}\cap T)\Phi=\Phi$ 或者 $G^{\mathfrak{U}}$。如果 $(G^{\mathfrak{U}}\cap T)\Phi=\Phi$，那么 $G^{\mathfrak{U}}=G^{\mathfrak{U}}\cap\langle x\rangle T=\langle x\rangle(G^{\mathfrak{U}}\cap T)=\langle x\rangle$，这与性质 1) 矛盾。因此 $(G^{\mathfrak{U}}\cap T)\Phi=G^{\mathfrak{U}}$，这表明 $G=T$。由假设和引理 3 可知 $\langle x\rangle\Phi/\Phi$ 在 G/Φ 中是 S-可置换的。从而 L/Φ 在 G/Φ 中是正规的。因而，$G^{\mathfrak{U}}/\Phi$ 是 G/Φ 的一个中心主因子，与性质 1) 相矛盾。这样，定理得证。　　证毕

注 1　设 G 是一个群，称 G 是内超可解的，如果 G 的每个真子群是超可解的，但 G 本身不是超可解的。文献[7]给出了所有内超可解群的结构。根据这一结论，也可验证定理 2。这是因为，如果假设定理 2 不成立，且设 G 是一个极小阶反例，那么，由引理 1 可知，G 是一个内超可解群。

由于所有的 S-拟正规嵌入子群和所有的弱 S-可补充子群都是 λ-可补充子群，所以下面的 2 个推论是定理 2 的特殊情形。

推论 1　一个群 G 是超可解的当且仅当 G 的任一在 G 中无超可解补充的极小子群或者 4 阶循环子群

在 G 中是 S-拟正规嵌入的。

推论 2 一个群 G 是超可解的当且仅当 G 的任一在 G 中无超可解补充的极小子群或者 4 阶循环子群在 G 中是弱 S-可补充的。

设 G 是一个群，H 是 G 的子群。称 H 在 G 中是 c-正规的[8]，如果 G 有一个正规子群 T 使得 $G=HT$ 且 $H\cap T\leqslant H_G$，这里 H_G 表示 G 的包含在 H 中的最大正规子群，则根据定义，正规子群、c-正规子群、可置换子群和 S-可置换子群都是 λ-可补充子群。因此，根据定理 2 有如下推论。

推论 3[9] 设 G 是一个奇阶群。如果 G 的所有极小子群在 G 中是正规的，那么 G 是超可解的。

推论 4[8] 如果一个群 G 的任一极小子群或者 4 阶循环群在 G 中是 c-正规的，那么 G 是超可解的。

推论 5[10] 设 E 是一个群 G 的正规子群使得 G/E 是超可解的。如果 E 的任一极小子群或者 4 阶循环子群在 G 中是 S-可置换的，那么 G 是超可解的。

类似定理 2 的讨论，可以证明如下结论。

定理 3 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系。一个群 $G\in\mathscr{F}$ 当且仅当 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E\in\mathscr{F}$，且对 E 的任一非循环 Sylow 子群 P，P 的任一在 G 中无超可解补充的素数阶或者 4 阶循环子群 H（当 $p=2$ 时，设 P 是一个非交换 2-群且 $H\nsubseteq Z_\infty(G)$）在 G 中是 λ-可补充的。

根据定理 3 可有如下推论。

推论 6[11] 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系，如果 $G^{\mathscr{F}}$ 的任一极小子群或者 4 阶循环子群在 G 中是 c-正规的，那么 $G\in\mathscr{F}$。

推论 7[12] 设 $\mathscr{F}$ 是一个包含所有超可解群的饱和群系且 E 是一个群 G 的正规子群使得 $G/E\in\mathscr{F}$。假设 G 的 Sylow 2-子群是交换的，如果 E 的所有极小子群在 G 中是可置换的，那么 $G\in\mathscr{F}$。

参考文献：

[1] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. Sufficient conditions for supersolubility of finite groups[J]. J Pure Applied Algebra, 1998, 127(2): 113-118.

[2] Skiba A N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups[J]. J Algebra, 2007, 315(1): 192-209.

[3] Li J B, Chen G Y, Yan Y X. New characterizations of p-supersolubility of finite groups[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(12): 4372-4388.

[4] Guo W B. The Theory of classes of groups[M]. New York: Science Press Kluwer Academic Publishers, 2000.

[5] Shemetkov L A, Skiba A N. On the $\chi\Phi$-hypocentre of finite groups[J]. J Algebra, 2009, 322(6): 2106-2117.

[6] Huppert B. Endliche Gruppen I[M]. New York: Spring- Verlag, 1967.

[7] 陈重穆. 内外-Σ群与极小非Σ群[M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.
Chen Z M. Inner-outer-Σ groups and minimal non-Σ groups [M]. Chongqing: Southwest Normal University Press, 1988.

[8] Wang Y. c-Normality of groups and its properties[J]. J Algebra, 1996, 180(3): 954-965.

[9] Buckly J. Finite groups whose minimal subgroups are normal[J]. Math Z, 1970, 116(1): 15-17.

[10] Shaalan A. The influence of π-quasinormality of some subgroups on the structure of a finite group[J]. Acta Math Hungar, 1990, 56(3-4): 287-293.

[11] Ballester-Bolinches A, Wang Y. Finite groups with some c-normal minimal subgroups[J]. J Pure Appl Algebra, 2000, 153(2): 121-127.

[12] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. On minimal subgroups of finite groups[J]. Acta Math Hungar, 1996, 73(4): 335-342.

On λ-supplemented Minimal Subgroups of Finite Groups

LI Jin-bao, YU Da-peng, CHEN Shun-min

(Dept. of Mathematics, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: It is an interesting topic in group theory to study the structure of groups whose subgroups possess some special properties. The present article is devoted to investigate the influence of minimal λ-supplemented subgroups on the structure of groups, which shows that the p-nilpotency and the supersolubility of a group can be determined by its λ-supplemented subgroups. This paper gives a necessary and sufficient condition for a group to be supersoluble in terms of the λ-supplemented subgroups of orders prime or 4, that is a group G is supersoluble if and only if G has a normal subgroup E such that G/E is supersoluble and for every non-cyclic Sylow subgroup P of E, every cyclic subgroup H of P of orders prime or 4 (if is a non-abelian 2-group and $H\nsubseteq Z_\infty(G)$) without a supersoluble supplement in G is λ-supplemented in G. In order to prove this result, a new characterization of p-nilpotency of groups is given and the minimal counterexamples are considered in this paper. As applications, some known results are generalized and unified.

Key words: finite groups; minimal subgroups; λ-supplemented subgroups; supersoluble groups; p-nilpotent groups

（责任编辑 黄 颖）