

一个超混沌系统的最优控制与同步*

朱红兰^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 理学院, 南京 210016; 2. 淮阴工学院 数理学院, 江苏 淮安 223003)

摘要:在参数未知的情况下,对于一个新的超混沌系统,首先设计最优控制器和参数自适应律实现了混沌系统的控制,并根据最优化原理和 Lyapunov 方法,选取适当的 Lyapunov 函数,应用 Lyapunov 第二方法通过推导得到 Lyapunov 函数关于系统的全导数是恒小于零的,根据 Lyapunov 稳定性定理,系统在零点是一致渐近稳定的,从而从理论上证明了控制器的有效性,紧接着对两个相同结构的混沌系统,根据最优化原理设计最优控制器和参数自适应律,实现了混沌系统的同步,并应用 Lyapunov 第二方法从理论上给予了证明,最后通过 Matlab 软件对控制与同步的效果进行了数值仿真,数值仿真的结果显示同步系统在很短的时间内很快达到了同步,进一步说明了同步方法的正确性与有效性。

关键词:混沌;控制;同步;最优化

中图分类号:TP27;O415.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2013)03-0065-04

1963年,Lorenz在一个简单的三维自治系统中首先发现了混沌吸引子。此后,研究混沌理论的学者越来越多,在过去的几十年里,混沌理论得到了深入研究并广泛应用到各个领域,如保密通信、光学系统、生物学等^[1-3]。

混沌控制与同步是混沌理论的一个非常活跃的分支。控制与同步方法有很多种,如线性反馈、非线性反馈、自适应、脉冲控制^[4-9]等。但是这些方法并没有实现所设计的控制器的最优化。最近,宋运忠等人运用最优化的方法研究了统一混沌系统的最优控制^[10],Awad El-Gohary等人研究了 Rössler 系统与 Lorenz 系统最优控制与同步^[11-12],即在实现混沌系统控制的同时,也实现控制器的最优化。这些研究都是针对参数已知的混沌系统的,在实际问题中很多混沌系统的参数都是未知的。

本文根据最优控制原理,利用 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程,在系统参数未知的情况下,设计最优控制器和参数自适应律实现了混沌系统的控制与同步,数值仿真的结果验证了方法的正确性。

1 最优控制原理

设受控的非线性动力系统方程为

$$\dot{x} = f(t, x) + u(t, x, y) \quad (1)$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态变量, f 是 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的连续映射, $u(t, x, y)$ 是控制函数。对系统(1)定义性能指标

$$J = \int_{t_0}^{+\infty} [q(x) + u^T R u] dt \quad (2)$$

其中 $q(x)$ 是连续、可导的正定函数。

本文的目的是对系统(1)寻找最优控制律 u^* ,既能使系统(1)稳定,也能使(2)式所描述的性能指标 J 取最小值。即求如下最优控制问题

$$\begin{aligned} \min J \\ \text{s. t. } \dot{x} = f(t, x) + u(t, x, y) \end{aligned}$$

根据动态规划,最优控制归结为 Hamilton-Jacobi-Bellman 偏微分方程

$$\min_{u^*} [\dot{E} + w] = \frac{\partial y}{\partial u^*} [\dot{E} + w] = 0 \quad (3)$$

其中 $E = \min \left\{ \int_{t_0}^{+\infty} [q(x) + u^T R u] dt \right\}$, $w = q(x) + u^T R u$, u^* 是最优控制器。

2 系统描述

本文考虑以下新的超混沌系统^[13],状态方程如下

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 - x_1 x_3 + a_3 x_2 - x_4 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - a_4 x_3 \\ \dot{x}_4 = x_1 + a_5 \end{cases} \quad (4)$$

其中 x_1, x_2, x_3 和 x_4 是系统变量, a_1, a_2, a_3, a_4 和 a_5 是系统参数。当 $a_1 = 36, a_2 = -16, a_3 = 28, a_4 = 3$ 且 $-0.7 \leq a_5 \leq 0.7$ 时系统处于超混沌状态;当 $a_1 = 36, a_2 =$

* 收稿日期:2012-05-05 修回日期:2013-01-20 网络出版时间:2013-05-20 18:04

资助项目:国家自然科学基金(No. 11211120155)

作者简介:朱红兰,女,讲师,研究方向为最优化与非线性分析,E-mail:13625151925@163.com

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.65_012.html

$-16, a_3=28, a_4=3, 0.7 < a_5 < 3.5$ 或者 $-3.5 < a_5 < -0.7$ 时, 系统处于混沌状态。

3 参数未知时混沌系统的最优控制

设受控的混沌系统为如下形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \hat{a}_1(x_2 - x_1) + \mu_1 \\ \dot{x}_2 = \hat{a}_2 x_1 - x_1 x_3 + \hat{a}_3 x_2 - x_4 + \mu_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \hat{a}_4 x_3 + \mu_3 \\ \dot{x}_4 = x_1 + \hat{a}_5 + \mu_4 \end{cases} \quad (5)$$

其中 \hat{a}_i 是对参数 $a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 的估计, $\mu_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是待设计的控制器, 控制混沌系统稳定到平衡点。

设 $\bar{x}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是系统的平衡点, 为了方便起见, 本文先作坐标变换, 设 $w_i = x_i - \bar{x}_i (i=1, 2, 3, 4)$, $\tilde{a}_i = \hat{a}_i - a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 则系统(5)转化为

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = (\tilde{a}_1 + a_1)(w_2 - w_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \mu_1 \\ \dot{w}_2 = (\tilde{a}_2 + a_2)(w_1 + \bar{x}_1) - (w_1 + \bar{x}_1)(w_3 + \bar{x}_3) + (\tilde{a}_3 + a_3)(w_2 + \bar{x}_2) - w_4 - \bar{x}_4 + \mu_2 \\ \dot{w}_3 = (w_1 + \bar{x}_1)(w_2 + \bar{x}_2) - (\tilde{a}_4 + a_4)(w_3 + \bar{x}_3) + \mu_3 \\ \dot{w}_4 = w_1 + \bar{x}_1 + \tilde{a}_5 + a_5 + \mu_4 \end{cases} \quad (6)$$

现在的目标就是设计最优控制器 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 和参数自适应律, 使混沌系统(6)在零点是一致渐进稳定的, 有如下定理。

定理 1 当最优控制器为

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{c_1}{n_1} w_1 - (w_2 - w_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1) a_1 \\ \mu_2 = -\frac{c_2}{n_2} w_2 - a_2 (w_1 + \bar{x}_1) + (w_1 + \bar{x}_1)(w_3 + \bar{x}_3) - a_3 (w_2 + \bar{x}_2) + w_4 + \bar{x}_4 \\ \mu_3 = -\frac{c_3}{n_3} w_3 - (w_1 + \bar{x}_1)(w_2 + \bar{x}_2) + a_4 (w_3 + \bar{x}_3) \\ \mu_4 = -\frac{c_4}{n_4} w_4 - (w_1 + \bar{x}_1 + a_5) \end{cases} \quad (7)$$

参数的自适应律为

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -\frac{c_1 w_1}{k_1} (w_2 - w_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1) - \frac{\beta_1}{2k_1} \tilde{a}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 = -\frac{c_2 w_2}{k_2} (w_1 + \bar{x}_1) - \frac{\beta_2}{2k_2} \tilde{a}_2 \\ \dot{\hat{a}}_3 = -\frac{c_2 w_2}{k_3} (w_2 + \bar{x}_2) - \frac{\beta_3}{2k_3} \tilde{a}_3 \\ \dot{\hat{a}}_4 = -\frac{c_3 w_3}{k_4} (w_3 + \bar{x}_3) - \frac{\beta_4}{2k_4} \tilde{a}_4 \\ \dot{\hat{a}}_5 = -\frac{c_4 w_4}{k_5} - \frac{\beta_5}{2k_5} \tilde{a}_5 \end{cases} \quad (8)$$

时, 混沌系统(6)在零点沿着最优轨迹是稳定的, 最优轨迹由如下的积分性能指标所确定。

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 [\alpha_i w_i^2 + n_i (u_i - v_i)^2] + \beta_1 \tilde{a}_1^2 + \beta_2 \tilde{a}_2^2 + \beta_3 \tilde{a}_3^2 + \beta_4 \tilde{a}_4^2 + \beta_5 \tilde{a}_5^2 \right\} dt \quad (9)$$

其中 t_0 是个固定的时间点, $v_i (i=1, 2, 3, 4)$ 满足

$$\begin{cases} v_1 = -(w_2 - w_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1) a_1 \\ v_2 = -a_2 (w_1 + \bar{x}_1) + (w_1 + \bar{x}_1)(w_3 + \bar{x}_3) - a_3 (w_2 + \bar{x}_2) + w_4 + \bar{x}_4 \\ v_3 = -(w_1 + \bar{x}_1)(w_2 + \bar{x}_2) + a_4 (w_3 + \bar{x}_3) \\ v_4 = -(w_1 + \bar{x}_1 + a_5) \end{cases}$$

$\beta_i (i=1, 2, 3, \dots, 8)$ 是非负实数, $k_i (i=1, 2, 3, 4)$ 和 $m_i (i=1, 2, 3, \dots, 9)$ 是正实数, α_i, n_i 和 k_i 满足

$$k_i = \sqrt{n_i \alpha_i}, i=1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

证明 下面根据最优化原理证明最优控制器(7)、参数自适应律(8)能使积分性能指标(9)式取得最小值, 而且使系统(6)在零点是一致渐进稳定的。

假设 E 为积分性能指标的最小值且

$$w = \left\{ \sum_{i=1}^4 [\alpha_i e_i^2 + n_i (u_i - v_i)^2] + \beta_1 \tilde{a}_1^2 + \beta_2 \tilde{a}_2^2 + \beta_3 \tilde{a}_3^2 + \beta_4 \tilde{a}_4^2 + \beta_5 \tilde{a}_5^2 \right\} \quad (11)$$

因此 $E = \min_{\vec{u}} \int_{t_0}^{+\infty} w dt \quad (12)$

其中 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, 函数 E 满足 Bellman-Hamilton-Jacobi 方程(3)式。根据系统(6), 考虑以下 Lyapunov 函数

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^4 c_i e_i^2 + k_1 \tilde{a}_1^2 + k_2 \tilde{a}_2^2 + k_3 \tilde{a}_3^2 + k_4 \tilde{a}_4^2 + k_5 \tilde{a}_5^2 \right\} \quad (13)$$

设 $u_i^* (i=1, 2, 3, 4)$ 就是要设计的最优控制器, 根据最优控制原理, 有

$$\begin{aligned} \min_{u^*} [\dot{E} + w] &= \sum_{i=1}^4 2c_i e_i \dot{e}_i + 2k_1 \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + \\ & 2k_2 \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + 2k_3 \tilde{a}_3 \dot{\tilde{a}}_3 + 2k_4 \tilde{a}_4 \dot{\tilde{a}}_4 + 2k_5 \tilde{a}_5 \dot{\tilde{a}}_5 + w \end{aligned} \quad (14)$$

将(7)、(8)和(10)式代入(13)式可得

$$\min_{u^*} [\dot{E} + w] = 0 \quad (15)$$

从而证得控制器 $u_i (i=1, 2, 3, 4)$ 满足 Bellman-Hamilton-Jacobi 方程(3)式, 说明控制器 $u_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是最优的。

下面证明在最优控制器(7)和参数自适应律(8)的作用下, 混沌系统在零点是稳定的。

Lyapunov 函数(13)式关于系统(6)的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \sum_{i=1}^4 2c_i e_i \dot{e}_i + 2k_1 \tilde{a}_1 \dot{\tilde{a}}_1 + 2k_2 \tilde{a}_2 \dot{\tilde{a}}_2 + \\ & 2k_3 \tilde{a}_3 \dot{\tilde{a}}_3 + 2k_4 \tilde{a}_4 \dot{\tilde{a}}_4 + 2k_5 \tilde{a}_5 \dot{\tilde{a}}_5 \end{aligned} \quad (16)$$

(7)、(8)和(10)式代入(16)式可得

$$\dot{E} = - \sum_{i=1}^4 2\alpha_i e_i^2 - 2(\beta_1 v_1^2 + \beta_2 v_2^2 + \beta_3 v_3^2 +$$

$$\beta_1 v_1^2 + \beta_3 v_3^2 < 0 \quad (17)$$

显然当 $\beta_i > 0$ 时, \dot{E} 是负定的,这就意味着在最优控制器(12)式和参数自适应律(13)式的作用下,系统(6)式是一致渐近稳定的。证毕

4 参数未知时混沌系统的同步

本节讨论参数未知时混沌系统的同步,以混沌系统(4)为驱动系统,响应系统如下

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \hat{a}_1(y_2 - y_1) + \mu_1 \\ \dot{y}_2 = \hat{a}_2 y_1 - y_1 y_3 + \hat{a}_3 y_2 - y_4 + \mu_2 \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - \hat{a}_4 y_3 + \mu_3 \\ \dot{y}_4 = y_1 + \hat{a}_5 + \mu_4 \end{cases} \quad (18)$$

(18)式减去(4)式可得误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \tilde{a}_1(e_2 - e_1) + \mu_1 \\ \dot{e}_2 = \tilde{a}_2 e_1 - y_1 e_3 - x_3 e_1 + \tilde{a}_3 e_2 - e_4 + \mu_2 \\ \dot{e}_3 = y_1 e_2 + x_2 e_1 - \tilde{a}_4 e_3 + \mu_3 \\ \dot{e}_4 = e_1 + \tilde{a}_5 + \mu_4 \end{cases} \quad (19)$$

其中 $e_i = y_i - x_i (i=1, 2, 3, 4)$, $\tilde{a}_i = \hat{a}_i - a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。

要使驱动系统(4)和响应系统(18)在参数 $a_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 未知的情况下达到同步且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0$, 其中 $e = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T$ 。得到如下定理。

定理 2 选择控制器

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{c_1}{n_1} e_1 \\ \mu_2 = -\frac{c_2}{n_2} e_2 + y_1 e_3 + x_3 e_1 + e_4 \\ \mu_3 = -\frac{c_3}{n_3} e_3 - y_1 e_2 - x_2 e_1 \\ \mu_4 = -\frac{c_4}{n_4} e_4 - e_1 \end{cases} \quad (20)$$

和参数自适应律

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -\frac{c_1 e_1}{k_1} (e_2 - e_1) - \frac{\beta_1}{2k_1} \tilde{a}_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 = -\frac{c_2 e_2}{k_2} e_1 - \frac{\beta_2}{2k_2} \tilde{a}_2 \\ \dot{\hat{a}}_3 = -\frac{c_2 e_2^2}{k_3} - \frac{\beta_3}{2k_3} \tilde{a}_3 \\ \dot{\hat{a}}_4 = -\frac{c_3 e_3^2}{k_4} - \frac{\beta_4}{2k_4} \tilde{a}_4 \\ \dot{\hat{a}}_5 = -\frac{c_4 e_4}{k_5} - \frac{\beta_5}{2k_5} \tilde{a}_5 \end{cases} \quad (21)$$

时,驱动系统(4)和响应系统(18)沿着指定的最优轨迹是一致渐近同步的,最优轨迹由如下的积分性能指标所确定。

$$I = \int_{t_0}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=1}^4 [\alpha_i \omega_i^2 + n_i (u_i - v_i)^2] + \beta_1 \tilde{a}_1^2 + \right.$$

$$\left. \beta_2 \tilde{a}_2^2 + \beta_3 \tilde{a}_3^2 + \beta_4 \tilde{a}_4^2 + \beta_5 \tilde{a}_5^2 \right\} dt \quad (22)$$

其中 t_0 是个固定的时间点, $v_i (i=1, 2, 3, 4)$ 满足

$$\begin{cases} v_1 = -(\omega_2 - \omega_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_1) a_1 \\ v_2 = -a_2(\omega_1 + \bar{x}_1) + (\omega_1 + \bar{x}_1)(\omega_3 + \bar{x}_3) - a_3(\omega_2 + \bar{x}_2) + \omega_4 + \bar{x}_4 \\ v_3 = -(\omega_1 + \bar{x}_1)(\omega_2 + \bar{x}_2) + a_4(\omega_3 + \bar{x}_3) \\ v_4 = -(\omega_1 + \bar{x}_1 + a_5) \end{cases}$$

$\beta_i (i=1, 2, 3, \dots, 8)$ 是非负实数, $k_i (i=1, 2, 3, 4)$ 和 $n_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是正实数, α_i, n_i 和 k_i 满足 $k_i = \sqrt{n_i \alpha_i} (i=1, 2, 3, 4)$ 。

定理 2 的证明与定理 1 的证明类似。

5 数值仿真

本节通过 Matlab 软件,采用四阶 Runge-Kutta 算法对混沌系统的控制与同步系统进行仿真,取步长为 0.01。

5.1 混沌系统控制的数值仿真

令 $c_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $n_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $k_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $\beta_i = 2 (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。新混沌系统的参数取为 $a_1 = 36, a_2 = -16, a_3 = 28, a_4 = 3, a_5 = 0$, 参数估计 $\hat{a}_1 = 1, \hat{a}_2 = 2, \hat{a}_3 = 2.5, \hat{a}_4 = 0.5, \hat{a}_5 = 1$ 。混沌系统的系统变量 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ 随时间变化的图像如图 1 所示。

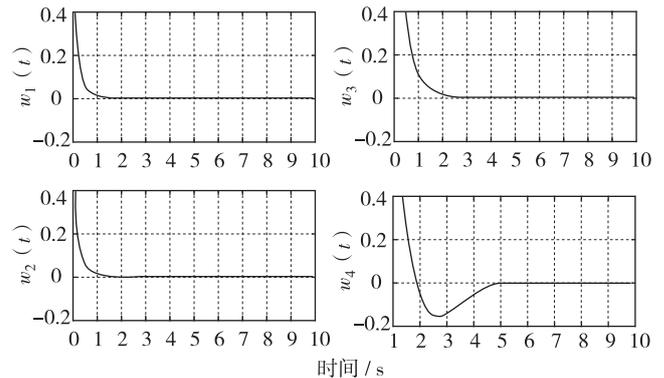


图 1 受控系统的状态演化曲线

仿真结果表明,最优控制方法可以实现系统的全局渐近稳定,状态变量收敛的精度高,收敛建立时间短,仿真结果体现了控制方法的有效性。

5.2 混沌系统同步的数值仿真

令 $c_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $n_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $k_i = 1 (i=1, 2, 3, 4)$, $\beta_i = 4 (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 。新混沌系统的参数取为 $a_1 = 36, a_2 = -16, a_3 = 28, a_4 = 3, a_5 = 0$, 参数估计 $\hat{a}_1 = 1, \hat{a}_2 = 2, \hat{a}_3 = 2.5, \hat{a}_4 = 3, \hat{a}_5 = 4$ 。误差系统的系统变量 e_1, e_2, e_3, e_4 随时间变化的图像如图 2、图 3 所示。

仿真结果表明,最优同步方法可以快速实现误差系统的全局渐近稳定,误差系统的状态变量收敛的精度高,收敛建立时间短,仿真结果体现了同步方法的有

效性。

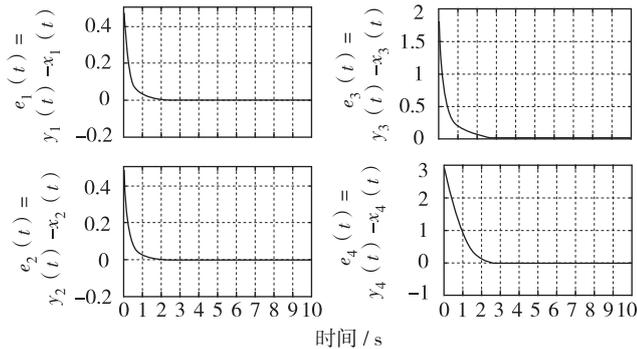


图2 误差系统的状态演化曲线

6 结论

本文根据最优化原理,对于一个新的混沌系统,在参数未知的情况下,通过设计最优控制器和参数自适应律,实现了它的控制与同步。本

文所设计的控制器在实现混沌系统控制与同步目标的同时,也实现了控制器的最优化,可以推广应用到其它混沌系统的控制与同步。

参考文献:

- [1] Li Z G, Xu D L. A secure communication scheme using projective chaos synchronization[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22: 477-481.
- [2] Chua L O, Lin G N. Canonical realization of chua's circuits family[J]. *IEEE Trans Circuit Syst*, 1990, 37: 885-902.

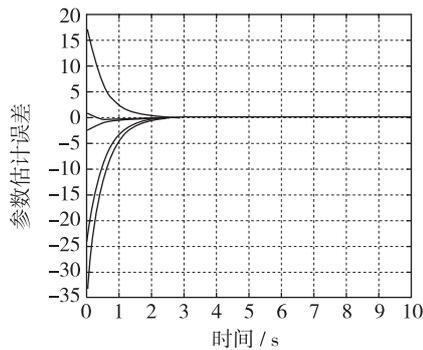


图3 参数估计的时间演化图

- [3] Yu W W, Cao J L, Wong K W, et al. New communication schemes based on adaptive synchronization [J]. *Chaos*, 2007, 17(3): 033114.
- [4] Niu B, Wei J. Stability and bifurcation analysis in an amplitude equation with delayed feedback[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37: 1362-1371.
- [5] Boulkroune A, Chekireb M, Tadjine M, et al. An adaptive feedback controller with observer for linearizable chaotic systems[J]. *Control and Intelligent Systems*, 2007, 35: 162-168.
- [6] Yin X H, Ren Y, Shan X M. Synchronization of discrete spatiotemporal chaos by using variable structure control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 14 (7): 1077-1082.
- [7] Chen S H, Lü J H. Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 14(4): 643-647.
- [8] Sun J T, Zhang Y P, Wu Q D. Impulsive control for the stabilization and synchronization of Lorenz systems [J]. *Physics Letters A*, 2002, 298(2-3): 153-160.
- [9] Sun J T, Zhang Y P, Qiao F, et al. Some impulsive synchronization criteria for coupled chaotic systems via unidirectional linear error feedback approach [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 19(5): 1049-1053.
- [10] 宋运忠, 赵光宙. 统一混沌系统的最优控制[J]. *系统仿真学报*, 2007, 19(1): 123-125.
- Song Y Z, Zhao G Z. Optimal control of unified chaos system[J]. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(1): 123-125.
- [11] Gohary A E. Optimal synchronization of Rössler system with complete uncertain parameters[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 27(2): 345-355.
- [12] Gohary A E, Sarhan A. Optimal control and synchronization of Lorenz system with complete unknown parameters [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 30(5): 1122-1132.
- [13] Gao T G, Gu Q L. Analysis of the hyper-chaos generated from Chen's system [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, 39(4): 1849-1855.

Optimal Control and Synchronization of a Hyperchaotic System

ZHU Hong-lan^{1,2}

(1. Department of mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016;

2. Faculty of Science Mathematics and Physics, Huaiyin Institute of Technology, Huaian Jiangsu 223003, China)

Abstract: In order to realize the control and synchronization of a new chaotic system through optimal controller. In this paper the optimal control and synchronization of a new chaotic system is achieved with fully unknown parameters through design optimal controller and parameters updating rule. It is proved that the derivatives of Lyapunov function are constant less than zero. According to the Lyapunov stability theory, the system is uniformly asymptotically stable at zero, thus the validity of this synchronous method theoretically is feasible by Lyapunov method and Hamilton-Jacobi-Bellman equation. Finally, a simulation is conducted with Matlab to prove the optimal control and synchronization of the chaotic system. Simulation results show that synchronization system achieve the synchronization in a short time. Simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the suggested scheme.

Key words: chaos; control; synchronization; optimal

(责任编辑 黄颖)