2013 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2013
第 30 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20130321

一般模糊推理具有还原性的全蕴涵三 I 算法*

王 超

(重庆商务职业学院,重庆 400030)

摘要:在王国俊教授提出的满足还原性的单一规则的全蕴涵三 I 算法基础上,利用模糊集合的相似度给每条模糊推理规则赋予权重,即 $w_i=\begin{cases}\dfrac{1-S}{2},\ i\notin I\\ \dfrac{1+S}{2},\ i\in I\end{cases}$,其中 $S=\max\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 且 $I=\{i\mid S_i=S,1\leqslant i\leqslant n\}$,使得全蕴涵三 I 算法在一般的模糊推理情形下也满足还原性。最后通过实例表明:用新方法推理得出的结果比文献[4]的全蕴涵三 I 算法的结果更具合理性。

关键词:模糊推理;还原性;全蕴涵三 I 算法;相似度

中图分类号:TP181;O159 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2013)03-0103-04

1975 年 Zadeh 教授提出了著名的模糊推理合成算法 CRI(Compositional rule of inference),许多学者对该算法进行了各种形式的推广[1-3]。但 CRI 算法不能满足经典推理具有还原性的最基本要求。

由于 CRI 算法的逻辑语义不很清楚,并且不满足还原性推理要求,王国俊教授在 1999 年提出了模糊推理的全蕴涵三 I 算法[4]。由于该算法每一步推理都使用了蕴涵关系,在单一规则情形下完全解决了还原性问题[5-6],但有例子表明全蕴涵三 I 算法在多条模糊推理规则的情形下仍不具有还原性。

文献[6-7]提出了带参数的模糊关系合成法则 CRIP 算法,但该算法中的参数确定非常困难,而且计算复杂。

本文在王国俊教授的全蕴涵三 I 算法基础上,利用模糊集合相似度对每条规则赋予权重,使三 I 算法在一般模糊推理情形下也满足还原性,并对此进行了证明。

1 模糊推理的基础概念

1.1 模糊推理的一般形式

经典逻辑中的推理是通过 MP 规则来进行的:设 A 与 B 是任意两个命题,已知推理规则 $A\to B$ 和事实 A,推出结论 B。这种推理可写成算式如下:

$$\text{设 } A\to B,\text{且 } A,\text{则 } B \tag{1}$$

在模糊推理中,上式中第 2 个 A 与 $A\to B$ 中的 A 不尽相同,比如为 A^*,则有

$$\text{设 } A\to B,\text{且 } A^*,\text{求 } B^* \tag{2}$$

这就是模糊推理的单一规则下的 FMP 形式。

本文主要讨论在一般多重多维情形下的模糊推理算法的还原性问题,其模糊前向推理 FMP(Fuzzy modus ponens)的一般形式:

$$\begin{array}{c}
\text{设}A_{11}\ \text{and}\ A_{12}\ \text{and}\ \cdots\ \text{and}\ A_{1m}\to B_1\\
A_{21}\ \text{and}\ A_{22}\ \text{and}\ \cdots\ \text{and}\ A_{2m}\to B_2\\
\vdots\\
A_{n1}\ \text{and}\ A_{n2}\ \text{and}\ \cdots\ \text{and}\ A_{nm}\to B_n\\
\underline{\text{且 } A_1^*\ \text{and}\ A_2^*\ \text{and}\ \cdots\ \text{and}\ A_m^*}\\
\text{求}\quad B^*
\end{array} \tag{3}$$

其中 A_{ij} 和 A_j^* 是论域 X_j 上的模糊集($i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m$),$B_i$ 和 B^* 是论域 Y 上的模糊集($i=1,2,\cdots,n$)。

1.2 多重多维模糊推理算法的还原性定义

下面给出一般情形下模糊推理算法还原性的定义。

定义 1[8](一般情形下 FMP 问题的还原性) 对于一般形式的推理规则(3),若给定的模糊推理算法满足:对于任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$,由 $A_j^*=A_{ij}$,可得出 $B^*=B_i(j=1,2,\cdots,m)$,则称该算法具有一般情形下模糊推理 FMP 问题的还原性。

* **收稿日期:**2012-12-30 **网络出版时间:**2013-05-20 18:04

作者简介:王超,男,讲师,硕士,研究方向为智能算法、软件工程等,E-mail:HC.wangchao@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130520.1804.201303.103_020.html

2 一般情形下模糊推理全蕴涵三I算法还原性讨论

对于一般情形的模糊推理，全蕴涵三I算法既可采用先推理后聚合的FITA方法，也可以用先聚合后推理的FATI方法。由于FITA方法与FATI方法在全蕴涵三I算法下等价[4]，下面只介绍全蕴涵三I算法的FITA方法。

设 $1\leqslant i\leqslant n$，求解下式

设 $A_i\rightarrow B_i$，且 A^*，求 C

设其答案为 C_i，令(式中"∨"的含义是取大值)

$$B^*=\bigvee_{i=1}^{n}C_i \tag{4}$$

即可。这时由

$$(A_i\rightarrow B_i)\rightarrow(A^*\rightarrow C_i) \tag{5}$$

的值为1且 $B^*\geqslant C_i$ 知

$$(A_i\rightarrow B_i)\rightarrow(A^*\rightarrow B^*) \tag{6}$$

的值恒为1，且由每个 C_i 的最小性知 B^* 是使(6)式的值对每个 i 均为1的论域 Y 中的最小Fuzzy集。

例1　设论域 $X_j=Y=[0,1]$，A_{ij}、$A_j^*\in F(X_j)$，B_i、$B^*\in F(Y)(i,j=1,2)$。

规则1　若 A_{11} 且 A_{12}，则 B_1。

规则2　若 A_{21} 且 A_{22}，则 B_2。

当 $A_1^*=A_{21}$ 且 $A_2^*=A_{22}$ 时，求 B^*。其中 $A_{11}(x_1)=\frac{2}{3}x_1$，$A_{12}(x_2)=x_2$，$B_1(y)=1-y$，$A_{21}(x_1)=x_1$，$A_{22}(x_2)=\frac{1}{3}(2+x_2)$，$B_2(y)=\frac{1}{3}y$ 蕴涵算子[1]为 $R_0(a,b)=\begin{cases}1,a\leqslant b\\(1-a)\vee b,a>b\end{cases}$，其中"∨"和"∧"分别表示取大和取小运算。

解　由于基于 R_0 算子的三I算法 $B^*(y)=\bigvee_{x\in E_y}\{A^*(x)\wedge R_0(A(x),B(y))\}$，其中 $E_y=\{x\in X\mid 1-A^*(x)<R_0(A(x),B(y))\}$。

根据规则1求出 $B_1^*(y)=B_{A_{11}}^*(y)\vee B_{A_{12}}^*(y)$，又因为 $B_{A_{11}}^*(y)=\bigvee_{x_1\in E_y}\{A_1^*(x_1)\wedge R_0(A_{11}(x_1),B_1(y))\}$

$$E_y=\{x_1\in X_1\mid 1-A_1^*(x_1)<R_0(A_{11}(x_1),B_1(y))\}$$

$$\text{由此可得 }B_{A_{11}}^*(y)=\begin{cases}1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}\\\frac{3}{2}(1-y),\frac{1}{3}<y<\frac{3}{5}\\\frac{3}{5},\frac{3}{5}\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

$$B_{A_{12}}^*(y)=\bigvee_{x_2\in E_y}\{A_2^*(x_2)\wedge R_0(A_{12}(x_2),B_1(y))\}$$

$$E_y=\{x_2\in X_2\mid 1-A_2^*(x_2)<R_0(A_{12}(x_2),B_1(y))\}$$

$$\text{由此可得出 }B_{A_{12}}^*(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}(3-y),0\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}\\\frac{3}{4},\frac{3}{4}<y\leqslant 1\end{cases}$$

$$\text{由此可知 }B_1^*(y)=\begin{cases}1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}\\\frac{3}{2}(1-y),\frac{1}{3}<y<\frac{3}{7}\\\frac{1}{3}(3-y),\frac{3}{7}\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}\\\frac{3}{4},\frac{3}{4}<y\leqslant 1\end{cases}$$

同理，根据规则2可得出 $B_2^*(y)=B_{A_{21}}^*(y)\vee B_{A_{22}}^*(y)=\frac{1}{3}y$。故最终结果为

$$B^*(y)=B_1^*(y)\vee B_2^*(y)=\begin{cases}1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}\\\frac{3}{2}(1-y),\frac{1}{3}<y<\frac{3}{7}\\\frac{1}{3}(3-y),\frac{3}{7}\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}\\\frac{3}{4},\frac{3}{4}<y\leqslant 1\end{cases}$$

显然 $B^*\neq B_2$。

例1说明全蕴涵三I算法在进行一般情形的模糊推理时不满足还原性。究其原因，发现算法都默认每一条已知规则对给定前提 A^* 的推理结果所起的作用是相同的，忽略了差异性。在文献[4]的基础上，根据各条规则前件与所给事实的相似度来对每条已知规则赋予权重，使全蕴涵三I算法在一般模糊推理情形下也具有还原性。

3 具有多重多维模糊推理还原性的全蕴涵三I算法

3.1 模糊集的相似度概念

定义2[9-11]　设 $X=[0,1]$，对应 $S:F(X)\times F(X)\rightarrow[0,1]$ 如果满足

$$S_1:S(A,A)=1,\forall A\in F(X)$$

$$S_2:S(A,A^C)=0,\forall A\in P(X)$$

$$S_3:\forall A,B,C,D\in F(X)$$

如 $\int_0^1(|A(x)-B(x)|)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1(|C(x)-D(x)|)\mathrm{d}x$

则有

$$S(A,B)\leqslant S(C,D)$$

就称 S 为 $F(X)$ 上的一个相似度。其中 $F(X)$ 为 X 上的模糊集全体，$P(X)$ 为 X 的子集全体。

3.2 具有多重多维模糊推理还原性的全蕴涵三I算法

基于相似度的一般情形的模糊推理算法如下。

第 1 步　根据王国俊教授给出的单一规则推理模糊全蕴涵三 I 算法，求出每一条规则对于给定前件的推理结果。

已知规则 A_{i1} and A_{i2} and … and $A_{im} \to B_i$，且给定前件 A_1^* and A_2^* and … and A_m^*，计算 B_i^*。具体方法如下：

1)先根据 $A_{ij} \to B_i$ 和 A_j^*，通过三 I 算法求出推理结果 $B_{ij}^*(j=1,2,\cdots,m)$：

$$B_{ij}^*(y)=\sup_{x\in E_y}\{A_j^*(x)\wedge R_0(A_{ij}(x),B_i(y))\}$$

其中

$$E_y=\{x\in X\mid(1-A_j^*(x))<R_0(A_{ij}(x),B_i(y))\}。$$

2)再将这 m 个推理结果求并集，即可得出 $B_i^*=\bigcup_{j=1}^{m}B_{ij}^*$。

第 2 步　计算平均相似度。假定前件为 A_{i1} and A_{i2} and … and A_{im}，给定前件为 A_1^* and A_2^* and … and A_m^*，令 $S_{ij}(j=1,2,\cdots,m)$ 为 A_{ij} 与 A_j^* 的相似度，平均相似度 S_i 为

$$S_i=\frac{1}{m}(S_{i1}+S_{i2}+\cdots+S_{im})$$

第 3 步　对第 i 条规则赋予权重：

$$w_i=\begin{cases}\dfrac{1-S}{2},\ i\notin I\\ \dfrac{1+S}{2},\ i\in I\end{cases}，其中 S=\max\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$$

且 $I=\{i\mid S_i=S,1\leqslant i\leqslant n\}$。

第 4 步　计算推理结果 $B^*=\bigcup_{i=1}^{n}w_iB_i^*$。

本文均假设在已知规则中不存在两条规则，其前件完全相同，而推理结果不同，否则可以将这两条规则合并成一条。故在第 2 步中不可能出现两个或两个以上的平均相似度都为 1 的情况。

3.3 新方法的还原性讨论

定理 1 (一般情形下模糊推理 FMP 算法的还原性)　对于(3)式，若 $A_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为正规 fuzzy 集，即 $\exists a_{ij}\in X_j$ 使 $A_{ij}(a_{ij})=1$，则当 $A_j^*=A_{i_0j}(i_0\in\{1,2,\cdots,n\})$ 时，根据上述算法可得出 $B^*=B_{i_0}$。

证明　假设对于 $i_0(1\leqslant i_0\leqslant n)$ 有 $A_j^*=A_{i_0j}(j=1,2,\cdots,m)$，则由全蕴涵三 I 算法是单一规则下的 P-还原算法可知 $B_{i_0j}^*=B_{i_0}$，那么 $B_{i_0}^*=\bigcup_{j=1}^{m}B_{i_0j}^*=B_{i_0}$。又由相似度定义中的 $S(A,A)=1$ 可知 $S_{i_0j}=1$，则 $S_{i_0}=\frac{1}{m}(S_{i_01}+S_{i_02}+\cdots+S_{i_0m})=1$，又因为 $S=\max\{S_1,S_2,\cdots,S_{i_0},\cdots,S_n\}$，可知 $S=S_{i_0}=1$。根据新方法的步骤 3 可得 $w_{i_0}=1,w_i=0(i=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq i_0)$，那么 $B^*=\bigcup_{i=1}^{n}w_iB_i^*=B_{i_0}$。　证毕

3.4 新方法与三 I 算法实例比较

例 2　设论域 $X_j=Y=[0,1]$，A_{ij}、$A_j^*\in F(X_j)$，B_i、$B^*\in F(Y)$，$i=1,2,3,j=1,2$。

规则 1　若 A_{11} 且 A_{12}，则 B_1。

规则 2　若 A_{21} 且 A_{22}，则 B_2。

规则 3　若 A_{31} 且 A_{32}，则 B_3。

其中 $A_{11}(x_1)=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}$，$A_{12}(x_2)=x_2$，$B_1(y)=y^2$，$A_{21}(x_1)=1-\frac{1}{3}x_1$，$A_{22}(x_2)=1-x_2$，$B_2(y)=1-\frac{1}{2}y$，$A_{31}(x_1)=x_1$，$A_{32}(x_2)=1-\frac{1}{2}x_2$，$B_3(y)=\frac{1}{2}y$，蕴涵算子为

$$R_0(a,b)=\begin{cases}1,a\leqslant b\\(1-a)\vee b,a>b\end{cases}$$

相似度函数为

$$S(A,B)=1-\frac{1}{b-a}\int_a^b(|A(x)-B(x)|)\,dx$$

模糊推理算法实例比较结果见表 1。

表 1　模糊推理算法实例比较

输入 A_1^*，A_2^*	全蕴涵三 I 算法结果	所给模糊推理算法推理结果
$A_1^*=A_{11}$ $A_2^*=A_{12}$	$B^*(y)=1$	$B^*=B_1$
$A_1^*(x_1)=\frac{7}{12}x_1+\frac{5}{12}$ $A_2^*=A_{12}$	$B^*(y)=1$	$B^*(y)=\begin{cases}0.53,0\leqslant y^2<\frac{7}{15}\\0.87y^2+0.12,\frac{7}{15}\leqslant y^2\leqslant 1\end{cases}$
$A_1^*(x_1)=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}$ $A_2^*(x_2)=\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}$	$B^*(y)=1$	$B^*(y)=\begin{cases}0.56,0\leqslant y^2<\frac{2}{5}\\0.63y^2+0.31,\frac{2}{5}\leqslant y^2\leqslant 1\end{cases}$
$A_1^*(x_1)=1-\frac{1}{2}x_1$ $A_2^*(x_2)=1-\frac{3}{4}x_2$	$B^*(y)=1$	$B^*(y)=0.93-0.35y$

推理结果比较分析：

1)当 $A_1^*=A_{11}$，$A_2^*=A_{12}$ 时，推理结果 $B^*=B_1$，所给模糊推理算法具有满足还原性。

2)当 $A_1^*(x_1)=\frac{7}{12}x_1+\frac{5}{12}$ 靠近 A_{11}，而 $A_2^*=A_{12}$ 时，所给模糊推理算法得出的结果比文献[4]的全蕴涵三I算法所得的结果更靠近 B_1。

4 结束语

本文所给的模糊推理算法是一种具有还原性的一般模糊推理的全蕴涵三I算法。该算法在文献[4]的全蕴涵三I算法基础之上，根据已知规则前件与事实的相似度对每条规则赋予权重，从而使得所给出的一般情形下的模糊推理具有还原性。最后通过实例说明，所给模糊推理的全蕴涵三I算法推理得出的结果比文献[4]的全蕴涵三I算法的结果更具合理性。

参考文献：

[1] Yeung D S, Tsang E C C. A comparative study on similarity-based fuzzy reasoning methods[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 1997, 27(2): 216-227.

[2] Zhang C Y, Fu H Y. Similarity measures on three kinds of fuzzy sets[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27: 1307-1317.

[3] 何映思，邓辉文.一种带权重的真值流推理算法[J].计算机科学，2009,36(12):223-226.
He Y S, Deng H W. Weighted truth-valued-flow inference algorithm[J]. Computer Science, 2009, 36(12): 223-226.

[4] 王国俊.模糊推理的全蕴涵三I算法[J].中国科学(E辑)，1999,29(1):43-53.
Wang G J. Triple I method of the fuzzy inference[J]. Scientia Sinica(E), 1999, 29(1): 43-53.

[5] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京：科学出版社，2008.
Wang G J. Non-classical mathematical logic and approximate reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[6] 徐蔚鸿.模糊智能系统中模糊推理研究[D].南京：南京理工大学，2004.
Xu W H. On fuzzy inference of fuzzy intelligence systems[D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology.

[7] 徐蔚鸿，叶有培，杨静宇.带参数的模糊推理合成法则研究[J].模式识别与人工智能，2002,15(4):397-401.
Xu W H, Ye Y P, Yang J Y. Research on the properties of a compositional rule of fuzzy inference with parameters[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(4): 397-401.

[8] 何映思，全海金，邓辉文.具有还原性的多重多维模糊推理算法[J].计算机科学，2007,34(4):145-148.
He Y S, Quan H J, Deng H W. An algorithm of general fuzzy inference with the reductive property[J]. Computer Science, 2007, 34(4): 145-148.

[9] 林宗振.σ模糊度、σ相似度及σ距离[J].暨南大学学报：自然科学版，2002,23(3):8-14.
Lin Z Z. σ-entropy, σ-similarity and σ-distance[J]. Journal of Jinan University: Natural Science & Medicine Edition, 23(3): 8-14.

[10] 林宗振.关于模糊度和贴近度的公理及基本性质[J].暨南大学理医学报，1987,3:1-10.
Lin Z Z. Axiom of ambiguity and closeness degree and basic properties[J]. Journal of Science and Medicine of Jinan University.

[11] Liu X C. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 52(9): 305-318.

Triple I Method with the Reductive Property of General Fuzzy Inference

WANG Chao
(Chongqing Business Vocational College, Chongqing 400030, China)

Abstract: Based on the Wang Guojun' s triple I method that satisfies the reductive property for single－rule fuzzy inference, by introducing similarity measure to endow each fuzzy rule with the weight, we get a triple I method with the reductive property of general fuzzy inference, that is $w_i=\begin{cases}\frac{1-S}{2}, & i\notin I\\ \frac{1+S}{2}, & i\in I\end{cases}$, wherein $S=\max\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ and $I=\{i \mid S_i=S, 1\leqslant i\leqslant n\}$. Finally, an example: results obtained with a new method of reasoning than the literature [4] the full implication triple I method results more reasonable.

Key words: fuzzy inference; reductive property; triple I method; similarity measure

（责任编辑　游中胜）