DOI:10.11721/cqnuj20130409

不变反凸模糊集*

刘 卫 锋
(郑州航空工业管理学院 数理系，郑州 450015)

摘要:研究了不变反凸模糊集及其相关性质,推广了有关文献中反凸模糊集的概念和相关结论。首先,通过将不变凸集的思想应用到反凸模糊集,定义了一种新的广义反凸模糊集——不变反凸模糊集:设 $A\in F(\mathbf{R}^n)$,称 A 为不变反凸模糊集,若存在映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,有 $A(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant A(x)\vee A(y)$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$\forall\alpha\in[0,1]$。然后,探讨了反凸模糊集与不变反凸模糊集的关系:当 $\eta(x,y)=x-y$ 时,不变反凸模糊集就退化为反凸模糊集,显然,反凸模糊集成为不变反凸模糊集的特例;通过构造例子说明不变反凸模糊集不是反凸模糊集,得到不变反凸模糊集是反凸模糊集的真推广的结论。根据不变反凸模糊集的定义,研究了不变反凸模糊集的并、稠密性等性质以及模糊集成为不变反凸模糊集的条件。最后,类似于不变反凸模糊集,分别探讨了模糊集成为不变强反凸模糊集和不变严格反凸模糊集的条件。

关键词:反凸模糊集;不变反凸模糊集;不变凸集;凸模糊集

中图分类号:O174 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)04-0046-04

由于凸集理论在凸分析、函数论、最优化理论等数学分支中均有广泛的应用,因此,对凸集进行研究和推广一直是数学应用基础研究领域的重要课题[1-5]。在凸集概念基础上,文献[1-3]引进了 p-凸集和绝对 p-凸集,并对它们的性质进行了探讨;文献[6]对 p-凸集和绝对 p-凸集的性质进行了较为系统的研究;文献[7]提出了 p-完美凸集和绝对 p-完美凸集;文献[8]通过弱化凸集和凸函数定义的条件对凸集进行了推广,引入了 E-凸集和 E-凸函数等概念;文献[9]提出了比凸集理论更具一般性的不变凸集理论;文献[10]将不变凸集与 E-凸集相结合,提出了 E-不变凸集。与凸集理论一样,凸模糊集在模糊最优化研究中也具有非常重要的作用,因此对凸模糊集的研究也是模糊数学和模糊优化中的一个热点,其中,文献[11]对凸模糊集作了较为系统的研究;文献[12]讨论了凸模糊集的性质;文献[13]引入 T-p-凸模糊集,并讨论了其性质;文献[14]给出了基于 t-范上的凸模糊集;文献[15-16]分别提出了一种$(\lambda,\mu]$-凸模糊集和$(\in,\in q_{(\lambda,\mu)})$-凸模糊集;文献[17]将不变凸集概念推广至凸模糊集,提出不变凸模糊集的概念,并对其性质作了初步研究;文献[18]提出了反凸模糊集,并研究了它的性质;文献[19]在文献[18]的基础上,提出了广义反凸模糊集——$[\mu,\lambda)$-反凸模糊集,推广了反凸模糊集。

但是,目前还没有见到将不变凸集与反凸模糊集相结合的报道。为此,本文尝试将不变凸集与反凸模糊集相结合,提出了一种新的广义反凸模糊集——不变反凸模糊集,使得反凸模糊集成为它的特例,从而拓展了反凸模糊集的概念,并对不变反凸模糊集的性质进行了初步研究。

1 相关概念

为叙述方便,下面给出凸集、不变凸集和反模糊凸集等相关概念。

定义 1[4] 设集合 $A\subset\mathbf{R}^n$,称 A 为凸集,若有 $\alpha x+(1-\alpha)y\in A$,$\forall x,y\in A$,$\forall\alpha\in[0,1]$。

定义 2[9] 设集合 $A\subset\mathbf{R}^n$,称 A 为不变凸集,若存在映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,有 $y+\alpha\eta(x,y)\in A$,$\forall x,y\in A$,$\forall\alpha\in[0,1]$。

定义 3[11] 设论域为 $\mathbf{R}^n$,称映射 $A:\mathbf{R}^n\to[0,1]$,$x\to A(x)$为论域 $\mathbf{R}^n$ 上的模糊集。

论域 $\mathbf{R}^n$ 上的全体模糊集记作 $F(\mathbf{R}^n)$。

定义 4[17] 设 $A\in F(\mathbf{R}^n)$,称 A 为不变凸模糊集,若存在映射 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,有 $A(y+\alpha\eta(x,y))\geqslant A(x)\wedge$

* **收稿日期**:2012-06-17 **修回日期**:2012-07-26 **网络出版时间**:2013-07-20 19:23
资助项目:河南省教育厅科学技术研究重点项目(No. 12B110027);郑州航空工业管理学院青年科研基金(No. 2011113003)
作者简介:刘卫锋,男,讲师,硕士,研究方向为数学建模、模糊数学,E-mail: lwf0519@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130720.1923.201304.46_006.html

$A(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in [0,1]$。

定义 5[18] 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，称 A 为反凸模糊集，若有 $A(\alpha x+(1-\alpha)y) \leqslant A(x) \vee A(y), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in [0,1]$。

定义 6[18] 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，称 A 为上半连续的，若有 $A(y) \leqslant A(x)+\varepsilon, \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，且 $\| y-x \| < \delta$。

条件 C[17] 设映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，称 η 满足条件 C，如果有

$$\eta(y, y+\alpha\eta(x,y))=-\alpha\eta(x,y), \eta(x, y+\alpha\eta(x,y))=(1-\alpha)\eta(x,y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in [0,1]$$

2 主要结果

定义 7 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，称 A 为不变反凸模糊集，若存在映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，有 $A(y+\alpha\eta(x,y)) \leqslant A(x) \vee A(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \forall \alpha \in [0,1]$。

显然，当 $\eta(x,y)=x-y$ 时，不变反凸模糊集就是反凸模糊集。则不变反凸模糊集是反凸模糊集的一种推广。

定理 1 任意反凸模糊集是不变反凸模糊集。

定理 1 的证明显然，但其逆命题是不成立的，即不变反凸模糊集是反凸模糊集的真推广，举例说明。

例 1 设 $A \in F(\mathbf{R})$，其中 $A(x)=\begin{cases}0.8, x>0\\1, x=0\\0.5, x<0\end{cases}$，$\eta(x,y)=\begin{cases}x-y, xy>0\\0, xy=0\\y-x, xy<0\end{cases}$，则 A 是关于 η 的不变反凸模糊集，而 A 不是反凸模糊集。

首先证明，A 是关于 η 的不变反凸模糊集。事实上，可以分以下情况。

1）当 $xy=0$ 时，$A(y+\alpha\eta(x,y))=A(y)$，此时又分 3 种情况：(a) 当 $x=y=0$ 时，则 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(y)=1 \leqslant A(x) \vee A(y)$；(b) 当 $x=0, y \neq 0$ 时，此时 $A(x)=1$，所以无论 $y>0$ 还是 $y<0$，即无论 $A(y)=0.8$ 还是 $A(y)=0.5$，均有 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(y) \leqslant A(x) \vee A(y)$；(c) 当 $x \neq 0, y=0$ 时，此时 $A(y)=1$，所以无论 $x>0$ 还是 $x<0$，即无论 $A(x)=0.8$ 还是 $A(x)=0.5$，均有 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(y)=1 \leqslant A(x) \vee A(y)$。

2）当 $xy>0$ 时，$A(y+\alpha\eta(x,y))=A(\alpha x+(1-\alpha)y)$，此时分 2 种情况：(a) 当 $x>0, y>0$ 时，则 $\alpha x+(1-\alpha)y>0$，且 $A(x)=A(y)=0.8$，故 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(\alpha x+(1-\alpha)y)=0.8 \leqslant A(x) \vee A(y)$；(b) 当 $x<0, y<0$ 时，则 $\alpha x+(1-\alpha)y<0$，且 $A(x)=A(y)=0.5$，故 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(\alpha x+(1-\alpha)y)=0.5 \leqslant A(x) \vee A(y)$。

3）当 $xy<0$ 时，$A(y+\alpha\eta(x,y))=A(-\alpha x+(1+\alpha)y)$，此时分 2 种情况：(a) 当 $x>0, y<0$ 时，则 $-\alpha x+(1+\alpha)y<0$，且 $A(x)=0.8, A(y)=0.5$，故 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(-\alpha x+(1+\alpha)y)=0.5 \leqslant A(x) \vee A(y)$；(b) 当 $x<0, y>0$ 时，则 $-\alpha x+(1+\alpha)y>0$，且 $A(x)=0.5, A(y)=0.8$，故 $A(y+\alpha\eta(x,y))=A(-\alpha x+(1+\alpha)y)=0.8 \leqslant A(x) \vee A(y)$。

由上述讨论可知，A 是关于 η 的不变反凸模糊集。

其次证明，A 不是反凸模糊集。事实上，有 $\forall a>0, x_0=-a, y_0=a, \alpha_0=0.5$，均有 $A(\alpha_0 x_0+(1-\alpha_0)y_0)=A(0)=1>A(x_0) \vee A(y_0)$，故 A 不是反凸模糊集。

定义 8 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，称 A 为不变强反凸模糊集，若存在映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，有 $A(y+\alpha\eta(x,y)) < A(x) \vee A(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n, x \neq y, \forall \alpha \in [0,1]$。

定义 9 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，称 A 为不变严格反凸模糊集，若存在映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，有 $A(y+\alpha\eta(x,y)) < A(x) \vee A(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n$，当 $x \neq y$ 时，$A(x) \neq A(y), \forall \alpha \in [0,1]$。

定理 2 设 $A, B \in F(\mathbf{R}^n)$ 是不变反凸模糊集，则 $A \cup B$ 是不变反凸模糊集。

证明 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$，由于集合 A, B 均为不变反凸模糊集，因此存在映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，对于 $\forall \alpha \in [0,1]$，有 $A(y+\alpha\eta(x,y)) \leqslant A(x) \vee A(y), B(y+\alpha\eta(x,y)) \leqslant B(x) \vee B(y)$。

于是，有
$$(A \cup B)(y+\alpha\eta(x,y))=A(y+\alpha\eta(x,y)) \vee B(y+\alpha\eta(x,y)) \leqslant$$
$$(A(x) \vee A(y)) \vee (B(x) \vee B(y))=(A(x) \vee B(x)) \vee (A(y) \vee B(y))=(A \cup B)(x) \vee (A \cup B)(y)$$

所以，$A \cup B$ 是不变反凸模糊集。　　证毕

可以将定理 2 推广至任意多个集合。

定理 3 设 $A_i \in F(\mathbf{R}^n), i \in I$（$I$ 为指标集）是不变反凸模糊集，则 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 是不变反凸模糊集。

定理 4 设 $A \in F(\mathbf{R}^n)$，存在映射 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$，且 η 满足条件 C，若存在 $\alpha \in (0,1)$，使 $A(y+\alpha\eta(x,y)) \leqslant$

$A(x)\vee A(y)$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,则 $B=\{\alpha\in(0,1)\mid A(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant A(x)\vee A(y),\forall x,y\in\mathbf{R}^n\}$在$(0,1)$上是稠密的。

证明 (反证法)设 B 在$(0,1)$上不是稠密的,则$\exists\alpha_0\in(0,1)$及邻域 $N(\alpha_0)$,使得 $N(\alpha_0)\cap B=\varnothing$。令 $\alpha_1=\inf\{\alpha\in B\mid\alpha\geqslant\alpha_0\}$,$\alpha_2=\sup\{\alpha\in B\mid\alpha\leqslant\alpha_0\}$,则有 $0\leqslant\alpha_2<\alpha_1\leqslant 1$。

由于 $\max\{\alpha,1-\alpha\}\in(0,1)$,取 $\beta_1,\beta_2\in B$,使 $\beta_1\geqslant\alpha_1$,$\beta_2\leqslant\alpha_2$,且 $\max\{\alpha,1-\alpha\}(\beta_1-\beta_2)<\alpha_1-\alpha_2$。

设 $\alpha'=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2=\beta_2+\alpha(\beta_1-\beta_2)$。现证明 $\alpha'\in B$,即证 $A(y+\alpha'\eta(x,y))\leqslant A(x)\vee A(y)$。利用条件 C,可得

$$y+\alpha'\eta(x,y)=y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha(\beta_1-\beta_2)\eta(x,y)=$$

$$y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha\left[-(\beta_1-\beta_2)\frac{1}{\beta_1}\eta(y,y+\beta_1\eta(x,y))\right]=y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha\left[\eta(y+\beta_1\eta(x,y),y+\beta_1\eta(x,y)+\right.$$

$$\left.\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1}\eta(y,y+\beta_1\eta(x,y))\right]=y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha\eta\left(y+\beta_1\eta(x,y),y+\beta_1\eta(x,y)+\frac{\beta_1-\beta_2}{\beta_1}(-\beta_1)\eta(x,y)\right)=$$

$$y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha\eta(y+\beta_1\eta(x,y),y+\beta_2\eta(x,y))$$

因此,有

$$A[y+\alpha'\eta(x,y)]=A[y+\beta_2\eta(x,y)+\alpha\eta(y+\beta_1\eta(x,y),y+\beta_2\eta(x,y))]\leqslant$$

$$A(y+\beta_1\eta(x,y))\vee A(y+\beta_2\eta(x,y))\leqslant(A(x)\vee A(y))\vee(A(x)\vee A(y))=A(x)\vee A(y)$$

所以,$\alpha'\in B$。

若 $\alpha'\geqslant\alpha_0$,则 $0\leqslant\beta_2\leqslant\alpha_2<\alpha_1\leqslant\alpha'\leqslant 1$,从而 $\alpha'-\beta_2\geqslant\alpha_1-\alpha_2$,又 $\alpha'-\beta_2=\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2-\beta_2=\alpha(\beta_1-\beta_2)<\alpha_1-\alpha_2$。于是,产生矛盾;若 $\alpha'<\alpha_0$,则 $0\leqslant\alpha'\leqslant\alpha_2<\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant 1$,从而 $\beta_1-\alpha'\geqslant\alpha_1-\alpha_2$,又 $\beta_1-\alpha'=\beta_1-(\alpha\beta_1+(1-\alpha)\beta_2)=(1-\alpha)(\beta_1-\beta_2)<\alpha_1-\alpha_2$,同样产生矛盾。

所以,B 在$(0,1)$上是稠密的。 证毕

定理5 设 $A\in F(\mathbf{R}^n)$是上半连续的,且 η 满足条件 C,若$\exists\alpha\in(0,1)$,有 $A(y+\alpha\eta(x,y))\leqslant A(x)\vee A(y)$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,则 A 是不变反凸模糊集。

证明 (反证法)设 A 不是不变反凸模糊集,则$\exists x,y\in\mathbf{R}^n$,$\alpha'\in(0,1)$,使 $A(y+\alpha'\eta(x,y))>A(x)\vee A(y)$,由定理4可知,存在 $\alpha_n\in B$,有 $\alpha_n\to\alpha'(n\to\infty)$。

定义 $y_n=y+\alpha'\eta(x,y)-\dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta[x,y+\alpha'\eta(x,y)]=y+\alpha'\eta(x,y)-\dfrac{\alpha_n}{1-\alpha_n}(1-\alpha')\eta(x,y)=y+\dfrac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)$,则 $y_n\to y(n\to\infty)$。现证明 $y+\alpha'\eta(x,y)=y_n+\alpha_n\eta(x,y_n)$。

$$y_n+\alpha_n\eta(x,y_n)=y+\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)+\alpha_n\eta\left(x,y+\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)\right)=$$

$$y+\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)+\alpha_n\left(1-\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\right)\eta(x,y)=y+\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)+\alpha_n\eta(x,y)-\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\alpha_n\eta(x,y)=$$

$$y+\alpha_n\eta(x,y)+(1-\alpha_n)\frac{\alpha'-\alpha_n}{1-\alpha_n}\eta(x,y)=y+\alpha'\eta(x,y)$$

由于 A 是上半连续的,且 $y_n\to y(n\to\infty)$,故 $A(y_n)\leqslant A(y)+\varepsilon$,$\forall\varepsilon>0$,$\forall n>N$,其中 $N>0$ 。

于是有 $A(y+\alpha'\eta(x,y))=A(y_n+\alpha_n\eta(x,y_n))\leqslant A(x)\vee A(y_n)\leqslant A(x)\vee(A(y)+\varepsilon)$,由 ε 的任意性可知,$A(y+\alpha'\eta(x,y))\leqslant A(x)\vee A(y)$,这与通过假设得到的不等式 $A(y+\alpha'\eta(x,y))>A(x)\vee A(y)$相矛盾。

所以,A 是不变反凸模糊集。 证毕

可将定理5推广至不变强反凸模糊集和不变严格反凸模糊集的情况。

定理6 设 $A\in F(\mathbf{R}^n)$是上半连续的,且 η 满足条件 C,若$\exists\alpha\in(0,1)$,有 $A(y+\alpha\eta(x,y))<A(x)\vee A(y)$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$x\neq y$,则 A 是不变强反凸模糊集。

定理7 设 $A\in F(\mathbf{R}^n)$是上半连续的,且 η 满足条件 C,若$\exists\alpha\in(0,1)$,有 $A(y+\alpha\eta(x,y))<A(x)\vee A(y)$,$\forall x,y\in\mathbf{R}^n$,$A(x)\neq A(y)$,则 A 是不变严格反凸模糊集。

参考文献:

[1] Köthe G. Topological vector space[M]. Heidelberg,Berlin:Springer-Verlag,1983.

[2] Smon S. The sequence spaces $l_{(pv)}$ and $m_{(pv)}$[J]. Proceedings of the London Mathematical Society,1965,15(3):422-436.

[3] 定光桂. 拓扑线性空间选讲[M]. 南宁:广西教育出版社,1987:62-98.

Ding G G. Some topics on Topological linear space[M]. Nanning:Guangxi Education Press,1987:62-98.

[4] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1997.

Yuan Y X, Sun W Y. Optimization theories and methods [M]. Beijing: Science Press, 1997.

[5] 胡适耕. 泛函分析[M]. 北京:科学出版社,2001.
Hu S G. Functional analysis[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[6] 刘文,王晶昕. p-凸集和绝对 p-凸集的一些性质[J]. 辽宁师范大学学报:自然科学版,1995,18(1):5-9.
Liu W, Wang J X. Some properties of p-convex sets and absolutely p-convex sets[J]. Journal of Liaoning Normal University: Natural Science, 1995, 18(1): 5-9.

[7] 张端,刘旭飞,冷岗松. p-完美凸集和绝对 p-完美凸集[J]. 上海大学学报:自然科学版,2010,16(3):262-267.
Zhang D, Liu X F, Leng S G. p-perfectly convex set and absolutely p-perfectly convex set[J]. Journal of Shanghai University: Natural Science, 2010, 16(3): 262-267.

[8] Youness E A. E-convex sets, E-convex functions, and E-convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(2): 439-450.

[9] Hanson M A, Mond B. Convex transformable programming problems and convexity[J]. Journal of Information and Optimization Science, 1987, 8(2): 201-207.

[10] Fulga C, Preda V. Nonlinear programming with E-preinvex and local E-preinvex functions[J]. European Journal of Operational Reseach, 2009, 192(3): 737-743.

[11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Inform and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[12] Liu Y M. Some properties of convex fuzzy sets[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1965, 111(1): 119-129.

[13] 洪平洲,许景飞. T-p-凸 Fuzzy 集[J]. 赣南师范学院学报,1999(6):1-7.
Hong P Z. T-p-convex fuzzy sets[J]. Journal of Gannan Teachers College, 1999(6): 1-7.

[14] 鞠红梅,袁学海,陈图云. 凸模糊子集的再定义[J]. 模糊系统与数学,2001,15(1):68-70.
Ju H M, Yu X H, Chen T Y. Convex fuzzy subsets redefined [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2001, 15(1): 68-70.

[15] 顾惠,廖祖华. 广义 Fuzzy 凸集[J]. 模糊系统与数学,2004,18(增刊):153-156.
Gu H, Liao Z H. Generalized convex fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2004, 18(Suppl): 153-156.

[16] Gu H, Liao Z H. $(\in, \in q_{(\lambda,\mu)})$-convex fuzzy set[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21(1): 92-96.

[17] 张萍,黄虎,王早. 预不变凸模糊集的一些性质[J]. 纯粹数学与应用数学,2006,22(3):355-359.
Zhang P, Huang H, Wang Z. Some properties of preinvex fuzzy sets[J]. Pure and Applied Mathematics, 2006, 22(3): 355-359.

[18] 廖祖华,黄昱,居世宾. 反凸模糊集[J]. 江南大学学报:自然科学版,2005,4(4):431-433.
Liao Z H, Huang Y, Ju S B. Anti-convex fuzzy sets[J]. Journal of Southern Yangtze University: Natural Science Edition, 2005, 4(4): 431-433.

[19] 黄昱,廖祖华. 广义反凸模糊集[C]//刘克. 第三届不确定系统年会论文集. Hong Kong: Global-Link Publisher, 2005: 415-419.
Huang Y, Liao Z H. Generalized anti-convex fuzzy sets [C]//Liu K. Proceedings of the 3rd China Annual Conference on Uncertainty. Hong Kong: Global-Link Publisher, 2005: 415-419.

Anti-convex Fuzzy Set Based on Invex Set

LIU Wei-feng

(Dept. of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: Anti-convex fuzzy set based on invex set and its related properties were researched, and anti-convex fuzzy set and some results in the related references were generalized. By applying thought of invex set to anti-convex fuzzy set, a new generalized anti-convex fuzzy set called anti-convex fuzzy set based on invex set was proposed. Let $A \in F(R^n)$, and A is called Anti-convex fuzzy set based on invex set, where η: $R^n \times R^n \to R^n$, and $A(y+\alpha\eta(x, y)) \leqslant A(x) \vee A(y)$, $\forall x, y \in R^n$, $\forall \alpha \in [0, 1]$. Then, the relation between anti-convex fuzzy set and anti-convex fuzzy set based on invex set was discussed. If $\eta(x, y) = x - y$, then anti-convex fuzzy set based on invex set was degenerated into anti-convex fuzzy set, and obviously, anti-convex fuzzy set was made particular case of anti-convex fuzzy set based on invex set. Anti-convex fuzzy set based on invex set was not anti-convex fuzzy set by building an example, and anti-convex fuzzy set based on invex set was a true generalization of anti-convex fuzzy set. Thirdly, based on the definition of anti-convex fuzzy set based on invex set, the properties about the union and denseness of anti-convex fuzzy set based on invex set and the condition for fuzzy sets to be anti-convex fuzzy set based on invex set were studied. Lastly, similarly to ant-convex fuzzy set based on invex set, the conditions for fuzzy set to be strongly anti-convex fuzzy set based on invex set and strictly anti-convex fuzzy set based on invex set fuzzy sets were respectively studied.

Key words: anti-convex fuzzy set; anti-convex fuzzy set based on invex set; invex set; convex fuzzy set

(责任编辑 黄 颖)