运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130501

排序论中工件和机器的对偶性*

唐国春[1]，陈荣军[2]，张 峰[1]
(1.上海第二工业大学 经济管理学院，上海 201209；
2.常州工学院 数学系，江苏 常州 213002)

摘要:提出排序问题中工件和机器的对等性,定义排序问题的对等排序,列举单台机器排序问题和多台机器自由作业排序问题的对等排序;在此基础上,把工件和机器看成是对偶的双方,研究这两者的对偶性,进而提出排序问题的对偶排序;研究排序问题与其对偶排序之间的关系——对偶关系,可能是排序论研究的新方向。

关键词:排序;工件;机器;对等;对偶

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2013)05-0001-04

排序(Scheduling)是为加工若干个工件(Job),而对工件及加工所需要的机器(Machine)按时间进行分配和安排,在完成所有工件加工时使得某个(些)目标为最优[1]。排序论(Scheduling theory)中的"工件"可以是任务、非圆齿轮、计算机终端、病人、降落的飞机等,"机器"可以是完成任务所需要的人财物资源、数控机床、计算机中央处理器(CPU)、医生、机场跑道等。工件何时就绪、何时开始加工、何时中断加工(Preempt)、何时更换工件、何时再继续加工原工件;机器何时就绪、何时进行加工、何时空闲(Idle)、何时更换机器等,都是按时间对工件和机器进行分配和安排。单纯的分配问题,单纯地把工件分配给机器以便进行加工,是数学规划问题。单纯的次序安排问题是 Sequencing 问题[2-3]。

本文把排序问题中工件和机器的"角色"对换,把工件换成机器,把机器换成工件,同时目标函数也做相应的转换,这样就得到与原排序问题相等价的排序问题——对等排序。在此基础上,把工件和机器看成是对偶的双方,研究这两者的对偶性,进而提出排序问题的对偶排序;研究排序问题与其对偶排序之间的关系——对偶关系,可能是排序论研究的新方向。

1 对等关系和对等排序

工件和机器是排序论中 2 个主要的研究对象。如果把这 2 个研究对象对换,把工件换成机器,把机器换成工件,按照表 1 参数之间的对等关系对换相关的参数,那么对于给定的排序问题 P 就得到与原排序问题相等价的排序问题,称为对等排序(Peer scheduling)问题,记为 P'。

表 1 列出排序问题中部分参数的对等关系,其它参数的对等关系可以类似得到。其中,与工件的参数相对等,机器的"就绪时间"是指机器可以开始加工工件的时间,机器的"权"表示机器的重要性,机器的"完工时间"是指机器完成加工的时间,机器的应结束期(Due date)是指机器应该结束加工的时间,超过该时间机器要支付代价,或者效率会降低。排序论中更多的参数可以参看文献[1,4]。

2 对等排序举例

任何排序问题按照表 1 中对等关系,都可以写出这个排序问题的对等排序。原排序问题的任何可行解(可行排序)在对等排序中都存在相应的一个可行解(可行排序)与之相对等,反之亦然。因而,这 2 个排序问题的计

* 收稿日期:2013-06-16　网络出版时间:2013-09-17 17:38
资助项目:国家自然科学基金(No.11001117;No.11201439;No.11271341)
作者简介:唐国春,男,教授,博士生导师,研究方向为排序论,E-mail: gctang@sspu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.1_025.html

表1　原排序问题P和对等排序问题P′参数之间的对等关系

Tab.1　Peer relationships between parameters of original scheduling and peer scheduling

原排序问题	对等排序问题
工件 $J_j(j=1,\cdots,n)$	机器 $M_j'(j=1,\cdots,n)$
工件 J_j 的就绪时间 r_j	机器 M_j' 的就绪时间 s_j'
工件 J_j 的权 w_j	机器 M_j' 的权 g_j'
工件 J_j 的交货期 d_j	机器 M_j' 的应结束期(Due date) e_j'
工件 J_j 的完工时间 C_j	机器 M_j' 的完工时间 D_j'
机器 $M_i(i=1,\cdots,m)$	工件 $J_i'(i=1,\cdots,m)$
机器 M_i 的就绪时间 s_i	工件 J_i' 的就绪时间 r_i'
机器 M_i 的权 g_i	工件 J_i' 的权 w_i'
机器 M_i 的应结束期(Due date) e_i	工件 J_i' 的交货期 d_i'
机器 M_i 的完工时间 D_i	工件 J_i' 的完工时间 C_i'
机器 M_i 加工工件 J_j 的加工时间 p_{ij}	工件 J_i' 在机器 M_j' 上加工的加工时间 p_{ji}'
工件的最大完工时间 $C_{\max}=\max\{C_j\mid j=1,\cdots,n\}$	机器的最大完工时间 $D'_{\max}=\max\{D_j'\mid j=1,\cdots,n\}$
工件的带权总完工时间 $\sum w_jC_j$	机器的带权总完工时间 $\sum g_j'D_j'$
机器的最大完工时间 $D_{\max}=\max\{D_i\mid i=1,\cdots,m\}$	工件的最大完工时间 $C'_{\max}=\max\{C_i'\mid i=1,\cdots,m\}$
机器的带权总完工时间 $\sum g_iD_i$	工件的带权总完工时间 $\sum w_i'C_i'$

算复杂性、最优解的构造、近似解的设计和性态都是“一样的”，所以说原排序问题与其对等排序之间是等价的(Equivalent)。对等排序也是一种排序问题，虽然对于对等排序了解和研究不多，有些对等排序还很“陌生”，甚至从来没有“见”过。采用三参数表示对等排序时，在对等排序的记号和参数中略去右上角的一撇“′”，并且工件的下标仍用 $j(j=1,\cdots,n)$，机器的下标仍用 $i(i=1,\cdots,m)$。显然，对等排序的对等排序，就是原排序问题。

下面列举几个对等排序的例子。

2.1 排序问题 $1||C_{\max}$ 的对等排序

排序问题 $1||C_{\max}$ 是 n 个工件要在单台机器 M 上加工，加工不允许中断，如何分配和安排工件和机器，在完成所有工件加工时使得工件的最大完工时间 $C_{\max}$ 为最小。由于工件的任何排法都有相同的目标函数值，因而工件的任何排序都是最优解[1]。

这个最简单的排序问题 $1||C_{\max}$ 的对等排序问题，用三参数表示是 $O|1|D_{\max}$。在三参数 $O|1|D_{\max}$ 中第二个参数1表示这个问题只有一个工件要加工。对等排序 $O|1|D_{\max}$ 是在自由作业的机器环境下，只加工一个工件，如何分配和安排工件和机器，当工件在所有机器上完成加工时，使得最后完成加工的机器的完工时间 $D_{\max}$ 为最小。由于经典排序是假设一个工件在一个时刻最多只能在一台机器上加工，同时假设一台机器在一个时刻最多只能加工一个工件，因而，按照机器的任何一个次序来加工这个工件都是 $O|1|D_{\max}$ 的最优解。

2.2 排序问题 $1||\sum w_jC_j$ 的对等排序

排序问题 $1||\sum w_jC_j$ 的最优解是 WSPT(Weighted shortest processing time)序[1]，即 $\frac{p_{\pi(1)}}{w_{\pi(1)}}\leqslant\frac{p_{\pi(2)}}{w_{\pi(2)}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{p_{\pi(n)}}{w_{\pi(n)}}$，其中 $(\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n))$ 是使得此不等式成立的工件序号 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个排列。$1||\sum w_jC_j$ 的对等排

序问题是 $O|1|\sum g_i D_i$，是 m 台自由作业机器只加工一个工件，如何分配和安排工件和机器，当工件在所有机器上加工完成时使得机器的带权总完工时间 $\sum g_i D_i$ 为最小，其中 g_i 是机器 M_i 的权。由对等性可知，$O|1|\sum g_i D_i$ 的最优解是 $\frac{p_{\pi(1)}}{g_{\pi(1)}} \leqslant \frac{p_{\pi(2)}}{g_{\pi(2)}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{p_{\pi(m)}}{g_{\pi(m)}}$，其中 $(\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(m))$ 是使得此不等式成立的机器序号 $(1, 2, \cdots, m)$ 的一个排列。

2.3 排序问题 $O2||C_{\max}$ 的对等排序

排序问题 $O2||C_{\max}$ 是多项式可解的，最优解是 LAPT(Longest alternate processing time)序[5]，即每当机器(空闲)可以加工时，在所有还没有加工过的工件中，选取在另一台机器上具有最长加工时间的工件在该台机器上加工。排序问题 $O2||C_{\max}$ 的对等排序问题是 $O|2|D_{\max}$。三参数 $O|2|D_{\max}$ 中 2 表示这个排序问题有 2 个工件要加工。根据对等性，对等排序问题 $O|2|D_{\max}$ 也是多项式可解的，最优解是当一个工件还没有在某台(些)机器上加工过，选择另一个工件在没有加工过的机器中加工时间最长的机器来加工这个工件。

2.4 排序问题 $O2||\sum C_j$ 的对等排序

排序问题 $O2||\sum C_j$ 是 NP 困难的，所以对等排序问题 $O|2|\sum D_i$ 也是 NP 困难的。

对于机器数 $m \geqslant 3$ 的自由作业问题 $Om||C_{\max}$ 和 $Om||\sum_j C_j$，类似可以讨论其相应的对等排序问题 $O|m|D_{\max}$ 和 $O|m|\sum_i D_i$，它们都是 NP 困难的。

3 对等排序的意义

3.1 与机器参数有关的优化目标

排序论发展至今已有 60 多年[6]，无论是经典的排序问题，还是现代的排序问题，优化的目标大多数是工件参数的函数。随着排序论应用的广泛和深入，随着从底层的微观管理逐步向中层和高层的宏观控制发展，在供应链排序和手术排程等实际问题中已经提出、考虑和研究优化的目标与机器参数有关的排序问题。对等排序的提出将会推动系统地研究这种排序问题。

3.2 排序问题的等价性

对等排序的提出，出现了许多本质上还是原排序问题、形式上是“新”的排序问题。排序问题与其对等排序可以说是“孪生的”一对。这两个排序问题是完全等价的。由于绝大多数的排序问题是 NP 困难的，因此少数性能优良的多项式时间算法就非常“可贵”。利用对等性，可以把对等排序的那些多项式时间算法，用来分析和研究优化的目标与机器参数有关的排序问题；也可以用多项式时间的排序算法和多项式时间的对等排序算法来分析和研究优化目标与工件参数和机器参数都有关的排序问题。

3.3 与工件参数和机器参数都有关的优化目标

对于优化目标与工件参数和机器参数都有关的排序问题，在一定情况下其对等排序的目标函数与原来的目标函数是“相同的”，或者说是相同结构的函数，只是系数可能不同。例如，优化目标是 $cC_{\max} + dD_{\max}$(其中 c 和 d 是给定的常数，表示一定量纲的系数)和 $c\sum w_j C_j + d\sum g_i D_i$ 就是如此。这 2 个优化目标在排序论中的涵义是很清楚的。后者 $c\sum w_j C_j + d\sum g_i D_i$ 是工件的带权总完工时间与机器的带权总完工时间之和，反映了 m 台机器加工 n 个工件从开始到结束时加工工件的费用和支付机器的费用之和。这个排序问题和其对等排序有相同结构的优化目标。

总之，分析和研究对等排序，在理论和应用两方面都是有意义的。

4 对偶排序

如果在排序问题中把工件和机器看成是对偶的双方，研究这两者的对偶性，定义与原排序问题相对偶的对偶排序，从而研究对偶排序与原排序问题之间更深刻的本质上的关系——对偶关系。这就是本文提出要研究的排序问题的对偶理论。

1) 对等排序是把原排序问题中机器和工件对换而得到的、本质上与原排序问题是“相同的”排序问题；对偶

排序是按照一定规则构造出来，与原排序问题不同，但与之有深刻联系的排序问题。

2）引入对偶问题的目的是为了进一步研究原来的排序问题。使得优化目标为最小的排序问题的对偶问题可以是使得优化目标为最大，一般来讲这两者优化的目标函数的结构不能“相差”太大。这些都是对偶排序与对等排序不相同的地方。

3）从排序问题的实际背景提出合适的对偶排序是非常重要的。笔者正在考虑供应链排序和手术排程方面的实例，因为这些实际问题的优化目标往往与工件参数和机器参数都有关，原排序问题和对等排序有相同结构的优化目标。

4）原排序与其对偶排序之间是否存在弱对偶、强对偶等关系，是否存在对偶的“定理”和性质，是值得思考与研究的。

正如线性规划的对偶理论[7]是线性规划发展的重要里程碑，对偶排序的提出可能会为排序论的研究提供新的思路，推动排序论的发展。笔者将继续深入对此研究，希望排序论学界也来予以关心和展开讨论。

致谢：方奇志、樊保强和农庆琴等3位参与本文的准备和撰写，上海第二工业大学排序讨论班讨论本文，并提出很好的意见，在此一并表示感谢！

参考文献：

[1] 唐国春，张峰，罗守成，等．现代排序论[M]．上海：上海科学普及出版社，2003.
Tang G C, Zhang F, Luo S C, et al. Theory of modern scheduling[M]. Shanghai: Shanghai Popular Science Press, 2003.

[2] Baker K R. Introduction to sequencing and scheduling[M]. New York: John Wiley&Sons, 1974.

[3] 越民义．组合优化导论[M]．杭州：浙江科学技术出版社，2001.
Yue M Y. Introduction to combinatorial optimization[M]. Hangzhou: Zhejiang Science&Technology Publishing House, 2001.

[4] French S. Sequencing and scheduling: an introduction to the mathematics of the job-shop[M]. Horwood: Chichester, 1982.

[5] Pinedo M. Scheduling theory, algorithms and systems[M]. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 2002.

[6] Potts C N, Strusevich V A. Fifty years of scheduling: a survey of milestones[J]. Journal of the Operational Research Society, 2009, 60: 41-68.

[7] Dantzig G B, Thapa M N. Linear programming I: introduction[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

Operations Research and Cybernetics

The Duality of Jobs and Machines in Scheduling

TANG Guo-chun[1], CHEN Rong-jun[2], ZHANG Feng[1]

(1. School of Economics and Management, Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209;
2. Department of Mathematics, Changzhou Institute of Technology, Changzhou Jiangsu 213002, China)

Abstract: In this paper we study peer-to-peer relationships of jobs and machines in scheduling theory. Peer scheduling is defined and applied to single machine scheduling and multi-machine open shop scheduling. Furthermore, jobs and machines are considered as dual parties, and their duality and dual scheduling are proposed. Study of dual relationships between scheduling and its dual one may be a new research direction in scheduling.

Key words: scheduling; job; machine; peer-to-peer; dual

（责任编辑　黄　颖）