2013 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2013
第 30 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 5

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20130502

时间相关的单机排序的最坏竞争比分析*

张 新 功

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:本文研究了工件的加工时间具有开工时间和加工所在位置相关的单机排序问题。工件的加工时间是序列中加工所在的位置和开工时间的非增函数,目标函数为最小化的误工工件个数和最小化总误工。本文对于所研究的 2 个目标函数利用 Moore-Hodgson 算法和 EDD 规则分别提出的启发式算法,对于目标函数位误工工件个数情形给出了最坏竞争比近似于 2,最小化总误工给出非常数的最坏竞争比。进一步如果工件的加工时间和工期具有一致关系,分别给出了 2 个多项式时间算法。

关键词:排序;时间相关排序;最坏竞争比;多项式时间算法

中图分类号:O233 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)05-0005-06

时间相关的排序问题在钢铁工业、港口布置、机场跑道、塑料工业和医疗领域都有着非常广泛的应用背景。已经吸引着越来越多的学者去关注这类问题的研究。Rachaniotis and Pappis[1]指出当火情发生时,开始努力救火的时间推迟会引起控制火势蔓延的时间和努力大大增加。为了使森林火情在一个特定的时间界限内被控制,对于调配可用的消防资源,作者提出几个需求覆盖模型。这个问题的处理就用到了退化的概念,即时间相关的模型,也就是随着火情控制的延长,扑灭大火的时间和效率就会增加。一般来说有关时间相关的排序模型分为 2 种类型:一是工件的加工时间是增函数,另一种是减函数。Gawiejnowicz[2]在最近的一本书《Time-dependent Scheduling》中对这 2 种类型做了详细论述。

Browne and Yechiali[3]考虑了工件的加工时间非常数的单机排序模型,工件 J_j 的实际加工时间是开工时间的线性增函数:$p_i(t)=a_i+b_it$。目标函数为最小化时间表长,按照$\frac{a_i}{b_i}$的非增顺序可以得到最优序。Mosheiov[4-5]研究了目标函数包括时间表长、总完工时间、总权完工时间、总误工、最大延迟和误工工件个数。当 $a_i=0$ 时所有的问题都给出了多项式时间算法。Cheng and Ding[6]考虑了工件的退化加工时间是开始时间的一个分段函数。他们证明总完工时间问题,即使退化率相同时,也是 NP-难的,进而提出一个拟多项式时间算法。

最近 Wang[7]研究了一个非线性的退化模型,工件的实际加工时间是开工时间的非线性函数。对于时间表长问题给出了多项式时间算法。除了非减的时间相关的排序模型以外,另一类就是加工时间为非增函数的时间相关的排序模型。Wang and Xia[8]考虑递减的线性退化模型,对于最小化时间表长和误工工件个数以及最大延迟给出了最优算法。Ho 等[9]研究时间相关的排序模型,工件 J_j 的实际加工时间分为:$p_j(t)=a_j-b_jt$,其中 b_j 为时间相关的递减的退化率。Ng 等[10]考虑 3 个线性递减的时间相关的排序模型,目标函数为总完工时间。分别给出了多项式时间算法和利用动态规划的方法设计出拟多项式时间算法。

由于具有很强的现实意义,退化和学习同时发生的模型也越来越引起学者的关注。Lee[11]首次考虑了退化和学习效应同时发生的情形。提供了 2 种模型:一种是工件的实际加工时间表示为 $p_{jk}(t)=\alpha_itk^a$,另一种是工件的实际加工时间表示为 $p_{jk}(t)=(p_0+\alpha_it)k^a$,其中工件 J_j 排在序列的第 k 个位置,α_i,a 和 t 分别表示工件 J_j 的退化率、学习率和开工时间。Yang 和 Kuo[12]研究了目标函数为时间表长、总完工时间和完工时间的总绝对差的退化和学习效应排序模型。Zhang 和 Yan[13]考虑了时间和位置相关的单机排序问题,证明经典的 SPT 序规则

* **收稿日期**:2012-12-02 **修回日期**:2013-05-05 **网络出版时间**:2013-09-17 17:38

资助项目:国家自然科学基金天元专项(No. 11226237);重庆市教委自然科学基金(No. KJ120624);重庆师范大学校级资助项目(No. 11XLB027; No. 2011XLZ05)

作者简介:张新功,男,副教授,硕士生导师,博士,研究方向为组合优化、物流供应链管理,E-mail:zxg7980@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20130917.1738.201305.5_028.html

对于时间表长和总完工时间仍是最优的,但是总加权完工时间、最大延迟和总权折扣完工时间3个问题经典的排序算法无法得到最优序,而通过这些经典算法给出了这3类问题的最坏竞争比分析,如果工件的加工时间和工期满足一致关系时给出了多项式时间算法。更多的有关学习和退化效应的排序问题参见文献[14-16]。

本文基于Zhang和Yan[13]指数相关的学习和退化模型,进而研究误工工件个数和总误工两类目标函数。本文结构如下:第二节描述了研究的问题并给出相关引理。第三、四节分别考虑误工工件个数和总误工的排序模型,最后给出一些结论。

1 问题描述

考虑工件集合 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$,每个工件 J_j 具有工期 d_j 和正常加工时间 p_j。工件 J_j 排在序列第 k 位置加工,开工时间为 t 的实际加工时间为 $p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}$,其中 α 和 β 分别满足 $0<\alpha\leqslant 1,0<\beta<1$。为了保证工件的加工时间为正数,则 $\beta(P-\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}p_j)<1$。为了方便记 $P=\sum\limits_{j=1}^{n}p_j$。在不引起混淆的情况下,$C_j$ 表示序列 π 上工件 J_j 的完工时间,$j=1,2,\cdots,n$。$C_{\max}=\max\{C_j|j=1,2,\cdots,n\}$ 表示时间表长,C_j,E_j,L_j,U_j 和 T_j 分别表示工件 J_j 的完工时间、提前、延迟、误工工件的个数和误工。利用经典的三参数法[17]本文研究的内容可以表述为:$1\mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\mid\sum U_j$;$1\mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\mid\sum T_j$。

引理1[13] 对于任意的工件序列 $\pi=[\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)]$,如果第一个工件 $J_{\pi(1)}$ 的开工时间为 t_0,则工件 $J_{\pi(j)}(j=1,2,\cdots,n)$ 的完工时间为 $C_{\pi(j)}(\pi)=t_0\prod\limits_{k=1}^{j}(1-\beta p_{\pi(k)}\alpha^{k-1})+\sum\limits_{k=1}^{j}p_{\pi(k)}\alpha^{k-1}\prod\limits_{i=k+1}^{j}(1-\beta p_{\pi(i)}\alpha^{i-1})$。

引理2[13] 对于问题 $1|p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}|C_{\max}$,按照工件的正常加工时间 p_j 的非减顺序排列可以得到问题的最优解(SPT)。

引理3[13] 对于问题 $1\mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\mid\sum C_j$,按照工件的正常加工时间 p_j 的非减顺序排列可以得到问题的最优解(SPT)。

定义1 如果 $a_i\leqslant a_j\Rightarrow b_i\leqslant b_j$,则称 a_j 和 b_j 具有一致关系,记作 (a_j,b_j)。

2 问题 $1\mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\mid\sum U_j$

很多人认为这个目标函数没有实际意义,是人造的。实际上,它通常用于监测和评价管理性能指标,即交货准时的百分比。令工件集合 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 表示工件集合,对于问题 $1||\sum U_j$,许多文献给出了算法最优性不同的证明[18-20]。修订的Moore-Hodgson算法叙述如下。

步骤1 置 $i=0$,把 J 中的工件按照EDD序放进集合 E_i 中,置 $L_i=\varnothing$;

步骤2 如果在 E_i 中没有工件或者没有误工工件,则算法终止,把 E_i 中的工件放在 L_i 中的工件前面得到的序列 (E_i,L_i) 即是最优序列。否则记 E_i 中的第一个误工工件为 J_{k_i}。

步骤3 在 E_i 中确定排在工件 J_{k_i} 之前的工件包括工件 J_{k_i} 的加工时间最长工件记为 J_{l_i};置 $E_{i+1}=E_i\backslash\{J_{l_i}\}$,$L_{i+1}=L_i\cup\{J_{l_i}\}$,$i=i+1$,转步骤2。

引理4[15] 误工问题的一个排序没有工件误工的充分必要条件是工件集合的EDD序没有工件误工。

引理特别指出如果序列中没有误工工件,则EDD序也没有误工工件。然而对于当前研究的问题利用Moore-Hodgson算法得到的序列不是最优序。

例 $n=1$,$p_1=1$,$p_2=100$,$d_1=91$,$d_2=90$,$\alpha=0.5$ 和 $b=0.000\ 5$。EDD序下的目标函数值为 $\sum U_j(EDD)=2$。但是如果工件序列是 $\pi=\{J_1,J_2\}$,则 $\sum U_j(\pi)=0$。因此EDD序不是最优序。

利用修订的Moore-Hodgson算法作为启发式算法给出问题 $1\mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\mid\sum U_j$ 的最坏竞争比分析。由于最优的误工工件个数可能是0,避免造成分母为零的现象出现,类似于Kise等[21],Cheng和Wang[22]的方法:对于任意的序列 π 修订的最坏竞争比为 $\dfrac{\sum U_j(\pi)+n}{\sum U_j(\pi^*)+n}$,其中 π^* 为最优序列。

定理 1　对于问题 $1 \mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1} \mid \sum U_j$，$\pi^*$ 和 π 分别表示最优序列和修订的 Moore-Hodgson 得到的序列。如果第一个工件的开工时间为 $t_0=0$，则 $\rho_1=\dfrac{\sum U_j(\pi)+n}{\sum U_j(\pi^*)+n}\leqslant\dfrac{2n-1}{n}$。

证明　考虑到 $\sum U_j(\pi^*)=0$，仅仅证明 $\sum U_j(\pi)\leqslant n-1$。假设 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$，最优的工件序列为 $\{J_{i_1},J_{i_2},\cdots,J_{i_n}\}$，工件 J_1 排在第 $m(m\geqslant 1)$ 个位置加工。接着得到 $p_{i_1}+p_{i_2}(1-p_{i_1})\alpha+\cdots+p_{i_m}\left(1-\sum_{j=1}^{m}p_{i_j}\right)\alpha^{m-1}\leqslant d_{i_m}$ 和 $p_{i_1}\leqslant d_{i_m}\leqslant d_{i_1}$。根据 Moore-Hodgson 算法，如果当前已经排过的工件集合 (E_i,L_i)，$i\geqslant 1$ 中 $E_i\neq\varnothing$，则剩余的没有安排的工件放在 E_i 中，完成了定理 1 的证明。如果从剩余工件集合中连续的选择工件放入到 E_i 中的工件在工件 J_{i_1} 之前的工件是误工的，则从剩余工件集合中选择工件，可能是 J_{i_1}。由于 $p_{i_1}\leqslant d_{i_1}$，则工件 J_{i_1} 在第一个位置加工，并且工件 J_{i_1} 是提前完工的工件，进而有 $\sum U_j(\pi)\leqslant n-1$。则得到 $\sum U_j(\pi)+n\leqslant 2n-1$，$\sum U_j(\pi^*)+n\geqslant n$，即 $\rho_1=\dfrac{\sum U_j(\pi)+n}{\sum U_j(\pi^*)+n}\leqslant\dfrac{2n-1}{n}$。　　证毕

接来下的定理证明如果工件的加工时间和工期满足一致关系 (p_j,d_j)，则 Moore-Hodgson 算法仍是最优的。

定理 2　对于问题 $1 \mid p_{jr}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{r-1},(p_j,d_j) \mid \sum U_j$，按照 Moore-Hodgson 算法得到的序列是最优序列。

证明　假设 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$ 和 $d_1\leqslant d_2\leqslant\cdots\leqslant d_n$。$J$ 表示工件集合 $\{J_1,\cdots,J_n\}$。设误工问题的最优解有 m 个误工工件。当 $m=0$ 时，误工问题的最优排序中没有误工工件，由引理 4 有 J 的 EDD 序中没有误工工件。下面证明 $m\geqslant 1$ 的情况，当 $i\leqslant m-1$ 时，E_{i+1} 中一定有误工的工件。如果 E_{i+1} 中没有误工工件，那表明算法得到的排序中误工工件的个数少于 m 个，与误工问题最优解有 m 个误工工件相矛盾。在实施 $i=m-1$ 的步骤 3 后所得到的是 E_m 和 L_m，其中 E_m 中的工件是按照 EDD 排序，L_m 按照任意的顺序排在序列的最后。假设当前模型的最优解 $\pi^*=(E^*,L^*)$，其中 E^* 的工件按照 EDD 序排列，且 L^* 中有 m 个误工工件，不妨设误工工件集合为 $\{J_{l_1},J_{l_2},\cdots,J_{l_m}\}$，以任意的次序排在 E^* 的后面。下证 E^* 中没有误工工件：根据适当的调整 $L^*=\{J_{q_1},J_{q_2},\cdots,J_{q_m}\}$ 中 m 个工件的序号后有 $q_i\neq l_1,\cdots,l_{i-1}$，很显然 $q_i\leqslant k_i$ 和 $p_{q_i}\leqslant p_{l_i}$。利用归纳法：当 $i=1$ 时，J_{k_1} 是工件集合 $E_1=\{J_1,\cdots,J_{k_1}\}$ 的第一个误工的工件，算法是把工件集合 E_1 中加工时间最长的工件 J_{l_1} 放进集合 L_1，得到排序 (E_1,L_1)。则工件集合 $E_1\backslash\{J_{l_1}\}$ 的工件在排序 (E_1,L_1) 中没有误工工件。如果 $J_{l_1}\in L^*$，则 $l_1=q_1$。若 $J_{l_1}\notin L^*$，则工件集合 E_1 中一定有一个工件是误工的，把这个工件记为 J_{q_1}。假设 $i-1$ 时成立，现在考虑对于 i 也成立。J_{k_i} 是工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_{i-1}}\}$ 的第一个误工的工件，算法是把工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_{i-1}}\}$ 中加工时间最长的工件 J_{l_i} 放进集合 L_i，得到排序 (E_i,L_i)。则工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_i}\}$ 的工件在排序 (E_i,L_i) 中没有误工工件。如果 $l_i\in L^*\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_{m-1}}\}$，记 $q_i=l_i$。如果 $l_i\notin L^*\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_{m-1}}\}$，由于 J_{k_i} 是工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_{i-1}}\}$ 的第一个误工的工件，且 $p_{q_1}\leqslant p_{l_1},p_{q_2}\leqslant p_{l_2},\cdots,p_{q_{i-1}}\leqslant p_{l_{i-1}}$。$J_{k_i}$ 也是工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_{i-1}}\}$ 的误工工件。因此有工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k_i}\}\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_{i-1}}\}$ 一定有一个工件在 $L^*\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_{m-1}}\}$，把其中的一个工件记为 J_{q_i}。从而证明了 $1\leqslant i\leqslant m$ 成立。

工件集合 $J\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_m}\}=(\{J_1,\cdots,J_{k_m}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_m}\})\cup\{J_{k_{m+1}},\cdots,J_n\}$ 和工件集合 $J\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_m}\}=(\{J_1,\cdots,J_{k_m}\}\backslash\{J_{q_1},\cdots,J_{q_m}\})\cup\{J_{k_{m+1}},\cdots,J_n\}$。上述 2 个工件集合根据 EDD 序就是 E_m 和 E^*。因而在 E_m 和 E^* 中都有工件 $J_{k_{m+1}}$，并且工件 $J_{k_{m+1}}$ 之后的工件都相同。根据算法 $\{J_1,\cdots,J_{k_m}\}\backslash\{J_{l_1},\cdots,J_{l_m}\}$ 在排列 (E_m,L_m) 中的工件都不误工。因此在 E_m 中位于工件 $J_{k_{m+1}}$ 之前的工件都不误工。工件 $J_{k_{m+1}}$ 之后的工件在排列 (E_m,L_m) 中的完工时间比最优序列 (E^*,L^*) 中的完工时间提前。由于 E^* 中的工件都不误工，所以工件 $J_{k_{m+1}}$ 之后的工件也都不误工。因此 E_m 中的工件都不误工。　　证毕

3 问题 $1 \mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1} \mid \sum T_j$

接下来考虑另一个与工期相关的目标函数值：总误工 $\sum T_j$。由于 $1 \| \sum T_j$ 是 NP 难的，则问题 $1 \mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1} \mid \sum T_j$ 也是 NP-难的。利用 EDD 规则作为启发式算法给出问题 $1 \mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1} \mid$

$\sum T_j$ 的最坏竞争比分析。由于最优的总误工可能是 0,避免造成分母为零的现象出现,采用 Kise et al.[21],Cheng 和 Wang[22]的方法:对于任意的序列 π 修订的最坏竞争比为 $\dfrac{\sum T_j(\pi)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}$,其中 π^* 为最优序列,且 $d_{\max}=\max\{d_j\,|\,j=1,\cdots,n\}$。

定理 3　对于问题 $1\,|\,p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1}\,|\,\sum T_j$,序列中第一个工件的开工时间为 $t_0=0$,对于最优序列 π^* 和 EDD 序所得到的序列 π 作为启发式算法的最坏竞争比为 $\rho_2=\dfrac{\sum T_j(\pi)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}\leqslant\dfrac{nP}{\sum C_j(\pi^*)}$,其中 $\sum C_j(\pi^*)$ 是最优序列 π^* 下的总完工时间。

证明　假设 $d_1\leqslant\cdots\leqslant d_n$ 和 $\pi=\{J_1,\cdots,J_n\}$。由于 $0<\alpha\leqslant1$ 和 $b(P-p_{\min})<1$,则有

$$\sum T_j(\pi)=\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_i\alpha^{i-1}\prod_{l=i+1}^{j}(1-\beta p_l\alpha^{l-1})-d_j,0\Big\}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_i-d_j,0\Big\}$$

令 $\pi^*=\{J_{[1]},\cdots,J_{[n]}\}$ 是最优序列,则

$$\sum T_j(\pi^*)=\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}\alpha^{i-1}\prod_{l=i+1}^{j}(1-\beta p_{[l]}\alpha^{l-1})-d_{[j]},0\Big\}=$$
$$\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}+\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}\alpha^{i-1}\prod_{l=i+1}^{j}(1-\beta p_{[l]}\alpha^{l-1})-d_{[j]},0\Big\}\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-d_{[j]},0\Big\}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}p_i+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}\alpha^{i-1}\prod_{l=i+1}^{j}(1-\beta p_{[l]}\alpha^{l-1})\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-d_{[j]},0\Big\}-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}p_i+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-d_{[j]},0\Big\}-n\sum_{j=1}^{n}p_j+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)=\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-d_{[j]},0\Big\}-nP+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)$$

其中 $\sum C_j(\pi^*)$ 是最优序列下的总完工时间。

进一步可以得到 $\sum T_j(\pi)-\sum T_j(\pi^*)\leqslant nP-\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)$。如果 $nP\geqslant\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)$,且

$$\sum T_j(\pi^*)=\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}-d_{[j]},0\Big\}-nP+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)\geqslant\sum_{j=1}^{n}\max\Big\{\sum_{i=1}^{j}p_{[i]}\Big\}-nd_{\max}-nP+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)\geqslant$$
$$nP-nd_{\max}-nP+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)=-nd_{\max}+\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)$$

则有

$$\rho_2=\frac{\sum T_j(\pi)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}=\frac{\sum T_j(\pi)+\sum T_j(\pi^*)-\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}\leqslant$$
$$1+\frac{n\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)}{\sum C_j(\pi^*)}=\frac{nP}{\sum C_j(\pi^*)}$$

如果 $nP<\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)$,则

$$\rho_2=\frac{\sum T_j(\pi)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}\leqslant\frac{\sum T_j(\pi)+\sum T_j(\pi^*)-\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}{\sum T_j(\pi^*)+nd_{\max}}\leqslant$$
$$1+\frac{n\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)}{n\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{j=1}^{n}C_j(\pi^*)+\sum C_j(\pi^*)}=\frac{nP}{\sum C_j(\pi^*)}$$

进而得到 $\rho_2 \leqslant \dfrac{nP}{\sum C_j(\pi^*)}$ 。但是如果 $\alpha \to 0$ 和 $\beta \to 0$ 时,则 $\rho_2 \leqslant \dfrac{\sum np_j}{\sum (n-j+1)p_j}$ 不能趋近于1,因此这个界不是紧的。　证毕

接下来证明如果工件的加工时间和工期满足一致关系时,EDD序得到问题的最优序列。

定理 4　对于问题 $1 \mid p_{jk}(t)=p_j(1-\beta t)\alpha^{k-1},(p_j,d_j) \mid \sum T_j$,按照工件工期 d_j 的非减顺序(EDD)得到的序列为最优序列。

证明　令EDD序规则生成的序列为 π。在序列 π 下工件 J_i 和 J_j 的误工为 $T_i(\pi)=\max\{C_i(\pi)-d_i,0\}$ 和 $T_j(\pi)=\max\{C_j(\pi)-d_j,0\}$。把序列 π 中的工件 J_i 和 J_j 交换加工位置后得到新的序列 π'。则在序列 π' 下工件 J_i 和 J_j 的误工为 $T_i(\pi')=\max\{C_i(\pi')-d_i,0\}$ 和 $T_j(\pi')=\max\{C_j(\pi')-d_j,0\}$。假设 $p_i \leqslant p_j$,则有 $d_i \leqslant d_j$。根据引理2和引理3,分下列3种情况进行讨论。

情形1:序列 π' 中工件 J_i 和 J_j 是提前的,注意到 $p_i \leqslant p_j \Rightarrow d_i \leqslant d_j$,则有 $C_j(\pi') \leqslant C_i(\pi') \leqslant d_i \leqslant d_j$。

情形2:序列 π' 中工件 J_i 和 J_j 是误工的,则 $T_j(\pi')+T_i(\pi')=C_j(\pi')-d_j+C_i(\pi')-d_i$。

$$T_j(\pi)+T_i(\pi)=\max\{C_j(\pi)-d_j,0\}+\max\{C_i(\pi)-d_i,0\}\leqslant$$
$$\max\{C_i(\pi')-d_j,0\}+\max\{C_j(\pi')-d_i,0\}\leqslant C_i(\pi')-d_j+C_j(\pi')-d_i=T_j(\pi')+T_i(\pi')$$

情形3:序列 π' 中工件 J_i 和 J_j 其中一个是误工的,另一个是提前的,则在序列 π' 中工件 J_i 是误工的,工件 J_j 是提前的,即 $T_j(\pi')+T_i(\pi')=C_i(\pi')-d_i$。接下来对于序列 π 中的工件 J_i 和 J_j 分3个子情况讨论。

1) 若 J_i 和 J_j 都是提前的,显然结论是成立的。

2) 若 J_i 和 J_j 都是误工的,则

$$T_j(\pi)+T_i(\pi)-T_j(\pi')+T_i(\pi')=C_j(\pi)-d_j+C_i(\pi)-d_i-(C_i(\pi')-d_i)\leqslant$$
$$C_j(\pi)-C_i(\pi')+C_i(\pi)-d_j\leqslant C_i(\pi)-d_j\leqslant C_j(\pi')-d_j\leqslant 0$$

3) 若工件 J_i 和 J_j 之一是误工的,另一个是提前的。则有:A) 工件 J_i 是误工的,工件 J_j 是提前的。则

$$T_j(\pi)+T_i(\pi)-T_j(\pi')+T_i(\pi')=C_i(\pi)-d_i-(C_i(\pi')-d_i)\leqslant$$
$$C_i(\pi)-C_i(\pi')\leqslant C_j(\pi')-C_i(\pi')\leqslant 0$$

B) 工件 J_j 是误工的,工件 J_i 是提前的,则

$$T_j(\pi)+T_i(\pi)-T_j(\pi')+T_i(\pi')=C_j(\pi)-d_j-(C_i(\pi')-d_i)\leqslant$$
$$C_j(\pi)-C_i(\pi')+d_i-d_j\leqslant C_j(\pi)-C_i(\pi')-d_j\leqslant 0$$

综合上述情形证明该定理是正确的。　证毕

4 结论

本文研究时间和位置相关的单机排序问题,工件的实际加工时间为开始加工的时间和加工所在位置的非增函数。经典的Moore-Hodgson算法和EDD序算法不能得到误工工件个数和总误工的最优算法。本文利用这2个算法作为启发式算法分别给出了问题的最坏竞争比分析。通过引入特殊的情况,即工件的加工时间和工期满足一致关系,证明了Moore-Hodgson算法和EDD序算法为误工工件个数和总误工的多形式时间算法。由于给出的最坏算法的下界不是紧的,所以进一步的研究方向是给出当前问题紧的最坏竞争比下界,或者提出一些拟多式时间算法。

参考文献:

[1] Rachaniotis N P, Pappis C P. Scheduling fire-fighting task using the concept of "deteriorating jobs"[J]. Canada Journal of Forest Research, 2006, 36: 652-658.

[2] Gawiejnowicz M. Time-dependent scheduling[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.

[3] Browne S, Yechiali U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor[J]. Operations Research, 1990, 38: 495-498.

[4] Mosheiov G. V-shaped policies for scheduling deteriorating jobs[J]. Operations Research, 1991, 39: 979-991.

[5] Mosheiov G. Scheduling jobs under simple linear deterioration[J]. Computers and Operations Research, 1994, 21: 653-659.

[6] Cheng T C E, Ding Q. Single machine scheduling with step-deterioration processing times[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 134: 623-630.

[7] Wang J B, Wang M Z. Single-machine scheduling with non-linear deterioration[J]. Optimization Letters, 2012, 6: 87-98.

[8] Wang J B, Xia Z Q. Scheduling jobs under decreasing linear deterioration[J]. Information Processing Letters, 2005, 94: 63-69.

[9] Ho K I J, Leung J Y T, Wei W D. Complexity of scheduling tasks with time-dependent execution times[J]. Information Processing Letter, 1993, 48: 315-320.

[10] Ng C T, Cheng T C E, Bachman A, et al. Three scheduling problems with deteriorating jobs to minimize the total completion time[J]. Information Processing Letter, 2002, 81: 327-333.

[11] Lee W C. A note on deteriorating jobs and learning in single-machine scheduling problems[J]. International Journal of Business and Economics, 2004, 3: 83-89.

[12] Yang D L, Kuo W H. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. Computers and Industrial Engineering, 2010, 58: 25-28.

[13] Zhang X G, Yan G L, Huang W Z, et al. Single-machine scheduling problems with time and position dependent processing times[J]. Annal of Operational Research, 2011, 186: 345-356.

[14] Wang J B. Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration[J]. Omega, 2007, 35(4): 397-402.

[15] Wang J B, Cheng T C E. Scheduling problems with the effects of deterioration and learning[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2007, 24(2): 245-261.

[16] Wang J B. Single machine scheduling with a time-dependent learning effect and deteriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society, 2009, 60: 583-586.

[17] Graham R L, Lawler E L, Lenstra J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5: 287-326.

[18] 孙叶平，唐万梅，唐国春. Moore-Hodgson 算法最优性的新证明[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2007，24(3)：4-7.
Sun Y P, Tang W M, Tang G C. A new proof of the optimality of Moore-Hodgson algorithm[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2007, 24(3): 4-7.

[19] 黄婉珍，唐国春. 分支定界法求解最小带权误工工件数排序[J]. 应用数学学报，1992，15(2)：194-199.
Huang W Z, Tang G C. A branch and bound approach to minimizing the weighted number of tardy jobs[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1992, 15(2): 194-199.

[20] 唐国春. 误工排序问题的研究[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2009，26(2)：1-7.
Tang G C. A study of scheduling problems to minimize the number of tardy jobs[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2009, 26(2): 1-7.

[21] Kise H, Ibaraki T, Mine H. Performance analysis of six approximation algorithms for the one machine maximum lateness scheduling problem with ready times[J]. Journal of the Operational Research Society of Japan, 1979, 22: 205-224.

[22] Cheng T C E, Wang G. Single machine scheduling problems with learning effect considerations[J]. Annal of Operations Research, 2000, 98: 273-290.

Operations Research and Cybernetics

The Worst-case Performance Ratio with Time-dependent Single-scheduling Problems

ZHANG Xin-gong

(School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper addresses two single-machine scheduling problems with time-and-position-dependent processing times. The processing time of a job is non-increasing function of its starting time and its position in the sequence. The objective is to minimize the number of the tardy jobs and the total tardiness. We present heuristic sequencing rules by Moore-Hodgson algorithm or EDD rule and analyze their worst-case bounds for performance ratios. We also show that these heuristic rules can be optimal under some agreeable conditions between the normal processing times and job due dates.

Key words: scheduling; time-dependent scheduling; worst-case performance ratios; polynomial time algorithm

(责任编辑　黄　颖)