2013 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2013
第 30 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 6

运筹学与控制论 DOI:10.11721/cqnuj20130605

向量优化问题 ε-弱有效解的 Lagrange 乘子定理*

廖 伟,赵克全
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:本文在邻近锥次似凸性假设下,建立了集值映射向量优化问题 ε-弱有效解的 Lagrange 乘子定理。首先,利用择一性定理,给出了集值优化问题 ε-弱有效解的一个必要性条件。进一步,建立了集值优化问题 ε-弱有效解的充分必要条件。最后,在邻近次似凸性假设下,建立了集值映射向量优化问题 ε-弱有效解的 Lagrange 乘子定理。本文的主要结果推广了已有文献中的相应结果到近似解的情形,同时将次似凸性条件减弱到邻近次似凸的假设下。

关键词:集值向量优化;ε-弱有效解;Lagrange 乘子定理
中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)06-0022-03

近年来,集值向量优化问题的研究越来越受到广大学者的重视,在诸多领域如经济、数学规划等中有重要的应用。集值向量优化问题的近似解是集值向量优化研究的一个重要方面。关于集值向量优化问题的近似解的研究已有大量文献[1-5]。最近关于集值优化问题的解的 Lagrange 乘子、对偶、鞍点等问题的研究也取得了一些成果[6-8]。特别地,Li[6]建立了带集值映射的广义不等式-等式系统的择一性定理,给出了集值向量优化问题的弱极小元的存在性的 Lagrange 型和鞍点型必要和充分条件。Rong 和 Wu[7]在锥次似凸的假设下,利用 Lagrange 乘子推导了集值向量优化问题的标量化结果,ε-鞍点定理和 ε-对偶结果。Yang 等人[8]提出了邻近次似凸函数的概念,并给出了邻近次似凸函数的一些性质,同时建立了集值向量优化问题的择一性定理,Lagrange 乘子定理和标量化定理。

受文献[6-8]的启发,本文在邻近锥次似凸性假设下,首先利用择一性定理,给出了集值优化问题 ε-弱有效解的一个必要性条件。进一步,建立了集值优化问题 ε-弱有效解的充分必要条件。最后建立了集值映射向量优化问题 ε-弱有效解的 Lagrange 乘子定理。本文的主要结果推广了文献[6]中的相应结果到近似解的情形,同时减弱了文献[6]中的次似凸性条件到邻近次似凸的假设下。

1 预备知识

对拓扑向量空间 Y,令 Y^* 是 Y 的拓扑对偶空间,记 0_Y 是 Y 中的零元。令 X_0 是任意给定的非空集合,Y,Z 和 W 是实拓扑向量空间。集合 $C\subset Y$ 是一个锥,称 C 是点的,如果 $C\cap(-C)=\{0_Y\}$。进一步地,$\mathrm{int}\,C$ 表示集合 C 的拓扑内部。记 C^+ 是 C 的对偶锥,$C^+=\{\varphi\in Y^*:\varphi(c)\geqslant 0,\forall c\in C\}$。

若$\varnothing\neq A\subset Y$,$C\subset Y$ 是凸锥且 $\mathrm{int}\,C\neq\varnothing$。令 $\varepsilon\in C$,定义 $\varepsilon-W\min[A,C]=\{y\in A:(y-\varepsilon-A)\cap\mathrm{int}\,C=\varnothing\}$。

令 $C\subset Y$ 是点闭凸锥且 $\mathrm{int}\,C\neq\varnothing$,$D\subset Z$ 是非空点凸锥。令 $F:X_0\to 2^Y$,$G:X_0\to 2^Z$ 和 $H:X_0\to 2^W$ 是集值映射。记$\varnothing\neq X\subset\mathrm{dom}\,F\cap\mathrm{dom}\,G\cap\mathrm{dom}\,H$,其中 $\mathrm{dom}\,F=\{x\in X_0:F(x)\neq\varnothing\}$。

考虑下面的集值向量优化问题

$$(\mathrm{VP})C-\min\quad F(x)$$
$$\text{s.t.}\quad G(x)\cap(-D)\neq\varnothing,0_W\in H(x),x\in X$$

记 $S=\{x\in X_0:x\in X,G(x)\cap(-D)\neq\varnothing,0_W\in H(x)\}$,$F(S)=\bigcup\limits_{x\in S}F(x)$。

基于文献[6-7]的思想,称 $\bar{x}\in S$ 是(VP)的 ε-弱有效解,如果 $F(\bar{x})\cap(\varepsilon-W\min[F(S),C])\neq\varnothing$。$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$是(VP)的 ε-弱极小元,如果 $\bar{x}\in X,\bar{y}\in F(\bar{x}),\bar{z}\in G(\bar{x})\cap(-D),0_W\in H(\bar{x})$,且 $\bar{y}\in F(\bar{x})\cap(\varepsilon-W\min[F(S),C])$。

定义 1[8] 集值映射 F 在 A 上是邻近 C-次似凸的,如果 $\mathrm{cone}\,(F(A)+C)$是凸集。

---

* **收稿日期**:2013-01-05 **网络出版时间**:2013-11-20 14:46
资助项目:国家自然科学基金(No. 11301574;No. 11271391;No. 11171363);重庆市自然科学基金(No. CSTC2012JJA00002)
作者简介:廖伟,男,硕士研究生,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:lwtyl520@163.com;**通讯作者**:赵克全,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.22_032.html

引理 1[8]　令 int $C\neq\varnothing$，集值映射 $F:X_0\to 2^Y$ 在 X_0 上是邻近 C-次似凸的，则 i）和 ii）有且仅有一个成立：i）存在 $x\in X_0$，使得 $F(x)\cap(-\mathrm{int}C)\neq\varnothing$；ii）存在 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，满足 $\varphi(y)\geqslant 0$，$\forall y\in F(X_0)$。

2 Lagrange 乘子定理

令 $L(Z,Y)$ 是从 Z 到 Y 的连续线性算子空间，$L^+(Z,Y)=\{T\in L(Z,Y):T(D)\subset C\}$。$(F,G,H)$ 是从 X_0 到 $Y\times Z\times W$ 的集值映射，记 $(F,G,H)(x)=F(x)\times G(x)\times H(x)$。

考虑下面的约束规格[6]

$$\text{(CQ)}\quad \forall(\psi,\xi)\in(D^+\times W^*)\setminus\{(0_{Z^*},0_{W^*})\},\ \exists x\in X_0$$
$$\text{s.t.}\quad (\psi[G(x)]+\xi[H(x)])\cap\mathbf{R}_-\neq\varnothing$$

其中 $\mathbf{R}_-=\{r\in\mathbf{R}:r<0\}$。

定理 1　假设 i）int $C\neq\varnothing$，$G(x)\cap(-\mathrm{int}\,D)\neq\varnothing$；ii）$0\in G(\bar{x})$；iii）$(F-\bar{y}+\varepsilon,G,H)$ 是邻近 $(C\times D\times\{0^W\})$-次似凸。若 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元，则存在 $(\varphi,\psi,\xi)\in(C^+\times D^+\times W^*)\setminus\{(0_{Y^*},0_{Z^*},0_{W^*})\}$，使得对任意 $x\in X_0$，$\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解。

证明　由 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元，则 $\bar{y}\in F(\bar{x})\cap(\varepsilon-W\min[F(S),C])$。从而有 $\bar{x}\in X$，$\bar{y}\in F(\bar{x})$，$\bar{z}\in G(\bar{x})\cap(-D)$，$0_W\in H(\bar{x})$ 且系统 $(F(x)+\varepsilon-\bar{y})\cap(-\mathrm{int}\,C)\neq\varnothing$，$G(x)\cap(-D)\neq\varnothing$，$0_W\in H(x)$ 无解。

由 i）、iii）和引理 1 知，存在 $(\varphi,\psi,\xi)\in(C^+\times D^+\times W^*)\setminus\{(0_{Y^*},0_{Z^*},0_{W^*})\}$，使得

$$\varphi[F(x)+\varepsilon-\bar{y}]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]\geqslant 0,\ \forall x\in X_0 \tag{1}$$

根据条件 ii）有 $\varphi(\bar{y})=\varphi(\bar{y})+\psi(0_Z)+\xi(0_W)\in\varphi[F(\bar{x})]+\psi[G(\bar{x})]+\xi[H(\bar{x})]$。再由（1）式可得

$$\varphi(\bar{y})\leqslant\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]+\varphi(\varepsilon),\ \forall x\in X_0$$

即 $\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解，从而命题得证。　　证毕

定理 2　在定理 1 的假设下，设 $G(x)$，$H(x)$ 满足约束规格（CQ）。则 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元当且仅当 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的可行点且存在 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，$\psi\in D^+$，$\xi\in W^*$，使得对任意 $x\in X_0$，$\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解，存在 $T\in L^+(Z,Y)$，使得 $-T(G(\bar{z})\cap(-D))\subset(\mathrm{int}\,C\cup\{0_Y\})\setminus(\varepsilon+\mathrm{int}\,C)$。

证明　必要性。若 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元，由定理 1 知，存在

$$(\varphi,\psi,\xi)\in(C^+\times D^+\times W^*)\setminus\{(0_{Y^*},0_{Z^*},0_{W^*})\}$$

使得对任意 $x\in X_0$，$\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解，即

$$\varphi(\bar{y})\leqslant\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]+\varphi(\varepsilon),\ \forall x\in X_0$$

下面只需证明 $\varphi\neq 0_{Y^*}$。假设 $\varphi=0_{Y^*}$，则 $(\psi,\xi)\neq(0_{Z^*},0_{W^*})$。故由上式得 $\psi[G(x)]+\xi[H(x)]\geqslant 0$，$\forall x\in X_0$。与 $G(x)$，$H(x)$ 满足约束规格（CQ）矛盾。

另一方面，由定理 1 的证明中的（1）式，取 $x=\bar{x}$，以及 $\bar{y}\in F(\bar{x})$，$\bar{z}\in G(\bar{x})\cap(-D)$，$0_W\in H(\bar{x})$ 则有 $\varphi(\varepsilon)+\psi(\bar{z})\geqslant 0$。由 $\psi\in D^+$ 和 $\bar{z}\in -D$ 得，$\psi(\bar{z})\leqslant 0$。故

$$-\varphi(\varepsilon)\leqslant\psi(\bar{z})\leqslant 0 \tag{2}$$

由 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，取 $c_0\in\mathrm{int}\,C$，满足 $\varphi(c_0)=1$。定义 $T(z)=c_0\psi(z)$，$\forall z\in Z$。

容易验证，$T\in L^+(Z,Y)$。由（2）式的右边不等式有 $-T(\bar{z})=-c_0\psi(\bar{z})\in\mathrm{int}\,C\cup\{0_Y\}$。同时，由（2）式的左边不等式可得，$-T(\bar{z})=-c_0\psi(\bar{z})\leqslant c_0\varphi(\varepsilon)$，即 $-T(\bar{z})\notin\varepsilon+\mathrm{int}C$。进一步地，由 $\bar{z}$ 在集合 $G(\bar{x})\cap(-D)$ 中的任意性，故有 $-T(G(\bar{z})\cap(-D))\subset(\mathrm{int}\,C\cup\{0_Y\})\setminus(\varepsilon+\mathrm{int}\,C)$。

充分性。若存在 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，$\psi\in D^+$，$\xi\in W^*$，使得对任意 $x\in X_0$，$\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解，则

$$\varphi(\bar{y})\leqslant\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]+\varphi(\varepsilon),\ \forall x\in X_0 \tag{3}$$

由 $x\in S$ 知，$G(x)\cap(-D)\neq\varnothing$，$0_W\in H(x)$。故存在 $z_x\in G(x)$ 和 $w_x\in H(x)$，使得 $z_x\in -D$，$w_x=0_W$，且 $\psi(z_x)\leqslant 0$，$\xi(w_x)=0$。由（3）式有 $\varphi(\bar{y})\leqslant\varphi[F(x)]+\psi[z_x]+\xi[w_x]+\varphi(\varepsilon)\leqslant\varphi[F(x)]+\varphi(\varepsilon)$，$\forall x\in S$。再由 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，可以得到 $[\bar{y}-F(x)-\varepsilon]\cap\mathrm{int}\,C=\varnothing$，$\forall x\in S$。

因此，$\bar{y}\in\varepsilon-W\min[F(S),C]$。又 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的可行点，故 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元。　　证毕

定理 3　在定理 2 的假设下，$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的 ε-弱极小元当且仅当 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是（VP）的可行点且存在 Lagrange 乘子 $(T,M)\in L^+(Z,Y)\times L(W,Y)$，使得

$$\bar{y}\in\varepsilon-W\min\left[\bigcup_{x\in X_0}(F(x)+T[G(x)]+M[H(x)]),C\right] \tag{4}$$

$$-T(G(\bar{z})\cap(-D))\subset(\mathrm{int}\,C\cup\{0_Y\})\setminus(\varepsilon+\mathrm{int}\,C) \tag{5}$$

证明 必要性。由定理 2 有，$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是(VP)的可行点且存在 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，$\psi\in D^+$，$\xi\in W^*$ 使得对任意 $x\in X_0$，$\varphi(\bar{y})$ 是 $\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]$ 的 $\varphi(\varepsilon)$-近似解，存在 $T\in L^+(Z,Y)$，使得(5)式成立。根据定理 2 的证明，定义 $M:W\to Y$，$M(w)=\xi(w)c_0$。显然，$M\in L(W,Y)$。故有

$$\varphi(\bar{y})\leqslant\varphi[F(x)]+\psi[G(x)]+\xi[H(x)]+\varphi(\varepsilon)=\varphi[F(x)+T[G(x)]+M[H(x)]+\varepsilon],\ \forall x\in X_0$$

由 $\varphi\in C^+\setminus\{0_{Y^*}\}$，则有 $(F(x)+T[G(x)]+M[H(x)]+\varepsilon-\bar{y})\cap(-\mathrm{int}\,C)=\varnothing$，$\forall x\in X_0$。

同时，$\bar{y}=\bar{y}+T(0_Z)+M(0_W)\in F(\bar{x})+T[G(\bar{x})]+M[H(\bar{x})]$，从而(4)式成立。

充分性。由(4)式有 $\bar{y}\notin F(\bar{x})+T[G(\bar{x})]+M[H(\bar{x})]+\varepsilon+\mathrm{int}C$，$\forall x\in X_0$。对 $x\in S$，有 $G(x)\cap(-D)\neq\varnothing$，$0_W\in H(x)$。则存在 $z_x\in G(x)$，$w_x\in H(x)$，$z_x\in -D$，$w_x=0_W$，$-T(z_x)\in C$，$M(w_x)=0_Y$。故 $\mathrm{int}C-T(x_x)\subset\mathrm{int}C+C\subset\mathrm{int}\,C$，即 $\mathrm{int}\,C\subset\mathrm{int}\,C+T(x_x)$。因此

$$F(x)+\mathrm{int}C+\varepsilon\subset F(x)+T(z_x)+\mathrm{int}\,C+M(w_x)+\varepsilon\subset F(x)+T[G(x)]+M[H(x)]+\mathrm{int}\,C+\varepsilon,\ \forall x\in S$$

故 $\bar{y}\notin F(x)+\varepsilon+\mathrm{int}C$，$\forall x\in S$。再由 $\bar{y}\in F(\bar{x})$，$\forall \bar{x}\in S$，则 $\bar{y}\in\varepsilon\text{-}W\min[F(S),C]$。因此，$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是(VP)的 ε-弱极小元。 证毕

注 定理 1～3 分别将文献[6]中的定理 1～3 推广到了近似解的情形，并且减弱了文献[6]中的凸性条件到邻近次似凸的假设。

参考文献：

[1] Kutateladze S S. Convex ε-programming[J]. Soviet Math Dokl, 1979, 20: 391-393.

[2] Loridan P. ε-solutions in vector minimization problems[J]. J Optim Theory Appl, 1984, 43: 265-276.

[3] Gutierrez Z, Jimenez B, Novo V. A unified approach and optimality conditons for approximate solutions of vector optimization problems[J]. SIAM J Optim, 2006, 17: 688-710.

[4] Gao Y, Yang X M. Optimality contions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. J Ind Manag Optim, 2011, 7: 483-496.

[5] Zhao K Q, Yang X M. A unifid stability result with perturbations invector optimization[J]. Optim Lett. DOI: 10.1007/s11590-012-0533-1.

[6] Li Zhong-fei. Lagrangian multipliers, saddle points, and duality in vector optimization of set-valued maps[J]. J Math Anal Appl, 1997, 215: 297-316.

[7] Rong W D, Wu Y N. ε-weak minimal solutions of vector optimization problems with set-vallued maps[J]. J Optim Theory Appl, 2000, 106: 569-579.

[8] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near-subconvexlikeness invector optimization with set-valued functions[J]. J Optim Theory Appl, 2001, 110: 413-427.

Operations Research and Cybernetics

A Lagrangian Multiplier Theorem of ε-weakly Efficient Solutions in Vector Optimization Problems with Set-valued Maps

LIAO Wei, ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In this paper, we establish a Lagrangian multiplier theorem of ε-weakly efficient solutions in vector optimization problems with set-valued maps under the assumption of nearly cone-subconvexlike. Firstly, a necessary condition of ε-weakly efficient solutions is given in vector optimization problems with set-valued maps using an alternative theorem. Moreover, a sufficient and necessary condition of ε-weakly efficient solutions is given. Finally, under the assumption of nearly cone-subconvexlike, a Lagrangian multiplier theorem of ε-weakly efficient solutions is established for vector optimization problems with set-valued maps. The main results in this article extend the corresponding results in [6] to the approximate and meanwhile the convexity condition of [6] is reduced to the nearly cone-subconvexlike assumptions.

Key words: vector optimization with set-valued maps; ε-weakly efficient solutions; Lagrange multiplier theorem

(责任编辑 黄 颖)