2013 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2013
第 30 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 30 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20130614

一类非线性变号三点边值问题正解的存在性*

魏 嘉[1],杨建辉[2]

(1. 甘肃联合大学 师范学院,兰州 730000;2. 周口师范学院 数学与信息科学学院,河南 周口 466001)

摘要:考虑非线性变号二阶三点边值问题 $u''+h(t)f(u(t))=0,t\in[0,1],u(0)=\alpha u'(0),u(1)=\beta u(\eta)$,其中 $\alpha\geqslant 0,0<\beta<1,\eta\in(0,1),h(t)\geqslant 0,t\in[0,\eta],h(t)\leqslant 0,t\in[\eta,1]$。通过运用锥上的 Guo-Krasnoselskii's 不动点定理研究了上述边值问题至少 2 个正解的存在性。

关键词:变号;三点边值问题;格林函数;正解;存在性

中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)06-0077-04

二阶微分方程在应用数学与物理领域中有着极为广泛的应用背景,特别是在经典力学、化学及电学中更为普遍。近年来,二阶边值问题受到了广泛的关注[1-6]。在文献[1]中,Bai 和 Feng 通过运用锥上的拉伸与压缩不动点定理证明了奇异二阶三点边值问题 $\begin{cases}u''+\lambda q(t)f(t,u)=0,0<t<1\\ u(0)=\beta u(\eta),u(1)=\alpha u(\eta)\end{cases}$ 正解的存在性,其中 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta<1,\lambda>0$ 为参数,$f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty),q\in(0,1)\to[0,\infty)$。

本文考虑变号二阶三点边值问题

$$\begin{cases}u''+h(t)f(u(t))=0,t\in[0,1]\\ u(0)=\alpha u'(0),u(1)=\beta u(\eta)\end{cases}\tag{1}$$

2 个正解的存在性,其中 $\alpha\geqslant 0,0<\beta<1,\eta\in(0,1),h(t)\geqslant 0,t\in[0,\eta],h(t)\leqslant 0,t\in[\eta,1]$。为了方便讨论,做如下记号:$f_0:=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t},f_\infty:=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t},\xi=\dfrac{1}{\alpha(1-\beta)+1-\beta\eta},\delta=\dfrac{(1-\beta)\eta}{2(1-\eta)},\mu=\min\left\{\beta,\dfrac{1-\beta}{2}\right\}$ 及

$$\Delta=\frac{\alpha}{1+\alpha}\min\left\{\beta,\frac{1-\eta}{\alpha+\eta}\right\}\tag{2}$$

$$\Delta_1=\max_{t\in[0,1]}\int_0^\eta G(t,s)h^+(s)\,\mathrm{d}s\tag{3}$$

$$\Delta_2=\mu\max_{t\in[0,1]}\int_{\beta\eta}^{\frac{\beta+1\eta}{2}}G(t,s)h^+(s)\,\mathrm{d}s\tag{4}$$

为了讨论(1)式正解的存在性,做如下假设

(H1)$f\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$,且非减。

(H2)$h\in C([0,1],\mathbf{R})$ 且 $h(t)\geqslant 0,t\in[0,\eta];h(t)\leqslant 0,t\in[\eta,1]$.另外,对于 $[0,1]$ 上的任一子区间,$h(t)\neq 0$。

(H3)$\Delta\delta h^+(\eta-\delta t)\geqslant h^-(\eta+t),t\in[0,1-\eta]$,其中 $h^+(t)=\max\{h(t),0\},h^-(t)=-\min\{h(t),0\}$。

本文主要结果是定理 1。

定理 1 设(H1)~(H3)成立,若以下条件成立:i) $f_0=f_\infty=\infty$;ii) 存在常数 $N_0>0$,使得 $f(u)\leqslant\dfrac{N_0}{\Delta_1},u\in[0,N_0]$,其中 Δ_1 如(3)式所示。则变号二阶三点边值问题(1)至少存在 u_1,u_2 2 个正解,且满足 $0<\|u_1\|<N_0<\|u_2\|$。

以上定理的证明用到的是 Guo-Krasnoselskii's 不动点定理。

定理 2[7-8] 设 E 是 Banach 空间,$K\subset E$ 是锥,Ω_1 和 Ω_2 是 E 中有界开集,$0\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2,A:K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 全连续,若 A 满足:i) $\|Au\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Au\|\geqslant\|u\|$, $u\in K\cap\partial\Omega_2$;或 ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Au\|\leqslant\|u\|,u\in K\cap\partial\Omega_2$,则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中必存在不动点。

---

* **收稿日期**:2012-11-17 **修回日期**:2012-12-09 **网络出版时间**:2013-11-20 14:46

资助项目:甘肃省自然科学基金项目(No. 3ZS042-B26-021);甘肃省教育厅科研项目(No. 1013B-03)

作者简介:魏嘉,男,讲师,硕士,研究方向为微分方程边值问题,E-mail:weijia_vick@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.77_041.html

1 预备引理

为了得到本文的主要结果,需要以下几个重要的引理。

引理1 如果 $y\in E$,则边值问题 $\begin{cases}u''+y(t)=0,t\in[0,1]\\u(0)=\alpha u'(0),u(1)=\beta u(\eta)\end{cases}$ 存在唯一解 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\,\mathrm{d}s$,格林函数 $G(t,s)=\begin{cases}G_1(t,s),0\leqslant t\leqslant\eta\\G_2(t,s),\eta<t\leqslant 1\end{cases}$,其中

$$G_1(t,s)=\begin{cases}g_{11}(t,s)=\xi[(\alpha+s)(1-t+\beta(t-\eta))],0\leqslant s\leqslant t\\g_{12}(t,s)=\xi[(\alpha+t)(1-s+\beta(s-\eta))],t<s\leqslant\eta\\g_{13}(t,s)=\xi(\alpha+t)(1-s),\eta<s\leqslant 1\end{cases}$$

$$G_2(t,s)=\begin{cases}g_{21}(t,s)=\xi(\alpha+s)[1-t+\beta(t-\eta)],0\leqslant s\leqslant\eta\\g_{22}(t,s)=\xi[(\alpha+s)(1-t)+\beta(t-s)(\alpha+\eta)],\eta<s\leqslant t\\g_{23}(t,s)=\xi(\alpha+t)(1-s),t<s\leqslant 1\end{cases}$$

引理2 格林函数 $G(t,s)$ 满足如下性质:i) $G(t,s)\geqslant 0,(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$;ii) $G(t,s_1)\geqslant\Delta G(t,s_2)$,$t\in[0,1],s_1\in\left[\frac{(\beta+1)\eta}{2},\eta\right],s_2\in[\eta,1]$,其中 Δ 如(2)式所示。

证明 很容易可以证明 $G(t,s)\geqslant 0,(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$。下面分2种情况来证明性质ii)。

对于 $0\leqslant t\leqslant\eta$。当 $s_1\in\left[\frac{(\beta+1)\eta}{2},t\right],s_2\in[\eta,1]$ 时,有

$$\frac{G(t,s_1)}{G(t,s_2)}=\frac{G_1(t,s_1)}{G_1(t,s_2)}=\frac{g_{11}(t,s_1)}{g_{13}(t,s_2)}=\frac{(\alpha+s_1)(1-t+\beta(t-\eta))}{(\alpha+t)(1-s_2)}\geqslant\frac{\alpha}{\alpha+\eta}\geqslant\frac{\alpha+1}{\alpha+\eta}\cdot\frac{\alpha}{\alpha+1}\min\left\{\beta,\frac{1-\eta}{\alpha+\eta}\right\}\geqslant\Delta$$

当 $s_1\in(t,\eta],s_2\in[\eta,1]$ 时,有

$$\frac{G(t,s_1)}{G(t,s_2)}=\frac{G_1(t,s_1)}{G_1(t,s_2)}=\frac{g_{12}(t,s_1)}{g_{13}(t,s_2)}=\frac{(\alpha+t)(1-s_1+\beta(s_1-\eta))}{(\alpha+t)(1-s_2)}\geqslant\frac{\alpha}{\alpha+\eta}\geqslant\Delta$$

对于 $\eta<t\leqslant 1$。当 $\frac{(\beta+1)\eta}{2}\leqslant s_1\leqslant\eta,\eta\leqslant s_2\leqslant t$ 时,有

$$\frac{G(t,s_1)}{G(t,s_2)}=\frac{G_2(t,s_1)}{G_2(t,s_2)}=\frac{g_{21}(t,s_1)}{g_{22}(t,s_2)}=\frac{(\alpha+s_1)[1-t+\beta(t-\eta)]}{[(\alpha+s_2)(1-t)+\beta(t-s_2)(\alpha+\eta)]}\geqslant\frac{[2\alpha+(\beta+1)\eta]\beta(1-\eta)}{2(\alpha+\eta)[1-\beta\eta+(\beta-1)t]}\geqslant$$

$$\frac{[2\alpha+(\beta+1)\eta]\beta(1-\eta)}{2\beta(\alpha+\eta)}\geqslant\frac{[2\alpha+(\beta+1)\eta]\beta(1-\eta)}{2\max\{1-\eta,\beta(\alpha+\eta)\}}\geqslant\frac{\alpha+\beta\eta}{\alpha+1}\min\left\{\beta,\frac{1-\eta}{\alpha+\eta}\right\}\geqslant\Delta$$

当 $\frac{(\beta+1)\eta}{2}\leqslant s_1\leqslant\eta,t<s_2\leqslant 1$ 时,有

$$\frac{G(t,s_1)}{G(t,s_2)}=\frac{G_2(t,s_1)}{G_2(t,s_2)}=\frac{g_{21}(t,s_1)}{g_{23}(t,s_2)}=\frac{(\alpha+s_1)[1-t+\beta(t-\eta)]}{(\alpha+t)(1-s_2)}\geqslant$$

$$\frac{[2\alpha+(\beta+1)\eta]\beta(1-\eta)}{2(\alpha+1)(1-\eta)}=\frac{[2\alpha+(\beta+1)\eta]\beta}{2(\alpha+1)}\geqslant\Delta$$

证毕

设Banach空间 $E=C[0,1]$ 且其范数为 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$。令 $C_0^+[0,1]=\{u\in E:\min\limits_{t\in[0,1]}u(t)\geqslant 0$ 且 $u(0)=\alpha u'(0),u(1)=\beta u(\eta)\}$,$P=\{u\in C_0^+[0,1]:u(t)$ 是凹的,$t\in[0,\eta]$;$u(t)$ 是凸的,$t\in[\eta,1]\}$,显然 P 为 E 中的锥。定义算子 $T:P\rightarrow P,(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,u(s))\,\mathrm{d}s,t\in[0,1]$。

引理3 设 $u\in P$,则 $u(t)$ 满足如下性质:i) $u(t)\geqslant\gamma(t)u(\eta),t\in[0,\eta]$;$u(t)\leqslant\gamma(t)u(\eta),t\in[\eta,1]$,其中 $\gamma(t)=\begin{cases}\frac{t}{\eta},t\in[0,\eta]\\\frac{(\beta-1)t+1-\beta\eta}{1-\eta},t\in[\eta,1]\end{cases}$;ii)当 $t\in\left[\beta\eta,\frac{(\beta+1)\eta}{2}\right]$ 时,有 $u(t)\geqslant\mu\|u\|$,其中 $\mu=\min\left\{\beta,\frac{1-\beta}{2}\right\}$。

证明 i)由于 $u\in P$,在 $[0,\eta]$ 上 u 为凹的,在 $[\eta,1]$ 上 u 为凸的,且 $u(0)=\alpha u'(\eta)$,$u(1)=\beta u(\eta)$。当 $t\in[0,\eta]$ 时,有 $u(t)\geqslant u(0)+\frac{u(\eta)-u(0)}{\eta}t=\frac{t}{\eta}u(\eta)$;当 $t\in[\eta,1]$ 时,有 $u(t)\leqslant u(1)+\frac{u(\eta)-u(1)}{1-\eta}(1-t)=$

$\dfrac{(\beta-1)t+1-\beta\eta}{1-\eta}u(\eta)$。

ii) 由于 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|=\max\limits_{t\in[0,\eta]}|u(t)|$。令 $\tau=\inf\{\zeta\in[0,\eta]:\max\limits_{t\in[0,\eta]}u(t)=u(\zeta)\}$。下面分 2 种情况来讨论。

当 $t\in[0,\tau]$ 时，有 $u(t)\geqslant u(0)+\dfrac{u(\tau)-u(0)}{\tau}t=\dfrac{tu(\tau)}{\tau}+\dfrac{(\tau-t)u(0)}{\tau}\geqslant\dfrac{t}{\eta}u(\tau)=\dfrac{t}{\eta}\|u\|$；

当 $t\in[\tau,\eta]$ 时，有 $u(t)\geqslant u(\tau)+\dfrac{u(\eta)-u(\tau)}{\eta-\tau}(t-\tau)\geqslant\dfrac{(\eta-t)u(\tau)}{\eta}=\left(\dfrac{\eta-t}{\eta}\right)\|u\|$。

从而，对 $\forall t\in[0,\eta]$，有 $u(t)\geqslant\min\left\{\dfrac{t}{\eta},\dfrac{\eta-t}{\eta}\right\}\|u\|$，即有 $\min\limits_{t\in\left[\beta\eta,\frac{(\beta+1)\eta}{2}\right]}u(t)\geqslant\min\left\{\beta,\dfrac{1-\beta}{2}\right\}\|u\|=\mu\|u\|$。　证毕

引理 4　设(H1)～(H3) 成立，则对于任意的 $D\in[0,+\infty)$，有

$$\int_{\frac{(1+\beta)\eta}{2}}^{\eta}G(t,s)h^{+}(s)f(D\gamma(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\int_{\eta}^{1}G(t,s)h^{-}(s)f(D\gamma(s))\,\mathrm{d}s$$

证明　对任意的 $\varepsilon\in[0,1-\eta]$，有 $\gamma(\eta-\delta\varepsilon)=1-\dfrac{(1-\beta)\varepsilon}{2(1-\eta)}$，$\gamma(\eta+\varepsilon)=1-\dfrac{(1-\beta)\varepsilon}{1-\eta}$。由于 f 非减，对 $\forall\varepsilon\in[0,1-\eta]$，有 $f\left(1-\dfrac{(1-\beta)\varepsilon}{2(1-\eta)}\right)\geqslant f\left(1-\dfrac{(1-\beta)\varepsilon}{1-\eta}\right)$。

设 $s=\eta-\delta\varepsilon$，$\varepsilon\in[0,1-\eta]$，对于 $\forall D\in[0,+\infty)$，据引理 2 中 ii)和(H3)，可得

$$\int_{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}^{\eta}G(t,s)h^{+}(s)f(D\gamma(s))\,\mathrm{d}s=-\delta\int_{1-\eta}^{0}G(t,\eta-\delta\varepsilon)h^{+}(\eta-\delta\varepsilon)f(D\gamma(\eta-\delta\varepsilon))\,\mathrm{d}\varepsilon\geqslant$$

$$\delta\Delta\int_{0}^{1-\eta}G(t,\eta+\varepsilon)h^{+}(\eta-\delta\varepsilon)f\left(\left(1-\frac{(1-\beta)\varepsilon}{2(1-\eta)}\right)D\right)\mathrm{d}\varepsilon\geqslant\int_{0}^{1-\eta}G(t,\eta+\varepsilon)h^{-}(\eta+\varepsilon)f\left(\left(1-\frac{(1-\beta)\varepsilon}{1-\eta}\right)D\right)\mathrm{d}\varepsilon$$

再令 $s=\eta+\varepsilon$，$\varepsilon\in[0,1-\eta]$，对于 $\forall D\in[0,+\infty)$，有

$$\int_{\eta}^{1}G(t,s)h^{-}(s)f(D\gamma(s))\,\mathrm{d}s=\int_{0}^{1-\eta}G(t,\eta+\varepsilon)h^{-}(\eta+\varepsilon)f\left(\left(1-\frac{(1-\beta)\varepsilon}{1-\eta}\right)D\right)\mathrm{d}\varepsilon$$

证毕

引理 5　设 (H1)～(H3)成立，则算子 T 是全连续的。

证明　由于 $T:P\to P$，函数 f 非减，据引理 3 中的 i)和引理 4 可得

$$\int_{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}^{1}G(t,s)h(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s=\int_{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}^{\eta}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s-\int_{\eta}^{1}G(t,s)h^{-}(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}^{\eta}G(t,s)h^{+}(s)f(\gamma(s)u(\eta))\,\mathrm{d}s-\int_{\eta}^{1}G(t,s)h^{-}(s)f(\gamma(s)u(\eta))\,\mathrm{d}s\geqslant0$$

因而
$$(Tu)(t)=\int_{0}^{1}G(t,s)h(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s=\int_{0}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s+$$

$$\int_{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}^{\eta}G(t,s)h(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\int_{0}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant0$$

再由于 $(Tu)''(t)=-h^{+}(t)f(u(t))\leqslant0$，$t\in[0,\eta]$，$(Tu)''(t)=h^{-}(t)f(u(t))\geqslant0$，$t\in[\eta,1]$。那么由 Arzela-Ascoli 定理可知，$T$ 是全连续的。　证毕

2 定理的证明

分 3 步来证明定理 1。第 1 步，由于 $f_0=\infty$，存在 $N_1\in(0,N_0)$，使得 $f(u)\geqslant\lambda u$ 且 $\lambda\Delta_2\geqslant1$，其中 $0<u\leqslant N_1$，$\lambda>0$，Δ_2 如(4)式所示。

令 $\Omega_{N_1}=\{u\in P:\|u\|<N_1\}$。对于 $\forall u\in P\cap\partial\Omega_{N_1}$，有

$$\|Tu\|\geqslant\max_{t\in[0,1]}\int_{\beta\eta}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\,\mathrm{d}s\geqslant\lambda\mu\|u\|\max_{t\in[0,1]}\int_{\beta\eta}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)\,\mathrm{d}s=\lambda\|u\|\Delta_2\geqslant\|u\|$$

即有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_{N_1}\tag{5}$$

第 2 步，由于 $f_\infty=\infty$，存在 $N_2>N_0$，使得 $f(u)\geqslant\rho u$ 且 $\rho\Delta_2\geqslant1$，其中 $u\geqslant N_2$，$\rho>0$。令 $N_3=\max\left\{2N_0,\dfrac{N_2}{\mu}\right\}$，

$\Omega_{N_3}=\{u\in P:\|u\|<N_3\}$。由于 $u\in P$，$\|u\|=N_3$，据引理 3 中 ii)可得

$$u(t)\geqslant\mu\|u\|=\mu N_3\geqslant N_2,t\in\left[\beta\eta,\frac{(\beta+1)\eta}{2}\right]$$

因此，$\|Tu\|\geqslant\max\limits_{t\in[0,1]}\int_{\beta\eta}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\rho\mu\|u\|\max\limits_{t\in[0,1]}\int_{\beta\eta}^{\frac{(\beta+1)\eta}{2}}G(t,s)h^{+}(s)\mathrm{d}s=\rho\|u\|\Delta_2\geqslant\|u\|$，即有

$$\|Tu\|\geqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_{N_3} \tag{6}$$

第 3 步，令 $\Omega_{N_0}:=\{u\in P:\|u\|<N_0\}$。据定理 1 中 ii)可知，对于 $\forall u\in P\cap\partial\Omega_{N_0}$，有

$$Tu(t)\leqslant\int_0^{\eta}G(t,s)h^{+}(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\Delta_1\frac{N_0}{\Delta_1}=\|u\|$$

即有

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,u\in P\cap\partial\Omega_{N_0} \tag{7}$$

由于 $N_1<N_0<N_3$，据(5)～(7)式及定理 2 可得，T 有 2 个不动点 $u_1\in P\cap(\overline{\Omega}_{N_0}\backslash\Omega_{N_1})$ 和 $u_2\in P\cap(\overline{\Omega}_{N_3}\backslash\Omega_{N_0})$。

综上可知，变号二阶三点边值问题(1)存在 u_1,u_2 2 个正解，且满足 $0<\|u_1\|<N_0<\|u_2\|$。

参考文献：

[1] Bai D L, Feng H Y. Eigenvalue for a singular second order three-point boundary value problem [J]. J Appl Math Comp, 2012, 38: 443-452.

[2] Gupta C P. Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for a second order ordinary differential equations [J]. J Math Anal Appl, 1992, 168: 540-551.

[3] Kong L J. Second order singular boundary value problems with integral boundary conditions[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72: 2628-2638.

[4] Liu B, Liu L, Wu Y. Positive solutions for singular second order three-point boundary value problems [J]. Nonlinear Anal, 2007, 66: 2756-2766.

[5] Sun J P, Wei J. Existence of positive solution for semipositone second-order three-point boundary-value problem[J]. Eletron J Diff Eqns, 2008, 41: 1-7.

[6] Wei J, Sun J P. Positive solutions to system of nonlinear second-order three-point BVPs [J]. Appl Math E-Notes, 2009(9): 55-62.

[7] Guo D, Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones[M]. New York: Academic Press, 1988.

[8] Krasnoselskii M A. Positive solutions of operator equations [M]. Groningen: P Noordhoff Ltd, 1964.

The Existence of Positive Solutions for Nonlinear Three-point Boundary Value Problem with Change of Sign

WEI Jia[1], YANG Jian-hui[2]

(1. School of Normal, Gansu Lianhe University, Lanzhou 730000;

2. College of Mathematics and Information Science, Zhoukou Normal University, Zhoukou Henan 466001, China)

Abstract: This paper is concerned the following nonlinear second order three-point boundary value problem$u''+h(t)f(u(t))=0$, $t\in[0,1]$, $u(0)=\alpha u'(0)$, $u(1)=\beta u(\eta)$, where $\alpha\geqslant0$, $0<\beta<1$, $\eta\in(0,1)$, $h(t)\geqslant0$, $t\in[0,\eta]$, $h(t)\leqslant0$, $t\in[\eta,1]$. The existence of two positive solutions at least are established by using the well-known Guo-Krasnoselskii' s fixed-point theorem in cones.

Key words: sign changing; three-point boundary value problem; Green's function; positive solution; existence

（责任编辑 黄 颖）