DOI:10.11721/cqnuj20130615

对称群 $S_n(n\leqslant 15)$的一个新刻画*

高彦伟[1], 曹洪平[2]
(1. 信阳师范学院 人事处,河南 信阳 464000;2. 西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘要:本文首先通过计算给出了对称群 $S_n(n\leqslant 15)$的阶$|S_n|$,最高阶元的阶 $k_1(S_n)$,次高阶元的阶 $k_2(S_n)$及第三高阶元的阶 $k_3(S_n)$。然后利用有限单群分类定理证明了 $S_n(n=1,2,\cdots,9,11,13,14)$可由$|S_n|$和 $k_1(S_n)$刻画,即有限群 G 同构于 S_n 当且仅当$|G| = |S_n|$且 $k_1(G) = k_1(S_n)$。最后对 $S_n(n=10,12,15)$证明了它们可由$|S_n|$和 $k_1(S_n)$, $k_2(S_n)$及 $k_3(S_n)$刻画,即 G 同构于 S_n 当且仅当$|G| = |S_n|$且 $k_1(G) = k_1(S_n)$, $k_2(G) = k_2(S_n)$及 $k_3(G) = k_3(S_n)$。

关键词:有限群;对称群;最高阶元的阶;次高阶元的阶

中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2013)06-0081-05

人们研究群的结构时,总是希望能够用群的最基本的特征对其进行描述。众所周知,群的阶和群中元素的阶是群的 2 个基本概念,也是描述群的 2 个重要的数量。那么能否用这 2 个阶对群进行纯数量刻画,就成了群论研究者感兴趣的一个课题。近 30 年里,群论研究者在这方面取得了大量的成果。令 $\pi_e(G)$表示群 G 中元素的阶的集合,施武杰教授在文献[1]中提出了这样的猜想:设 G 为群,H 为有限单群,则 $G\cong H$ 当且仅当:1) $\pi_e(G)=\pi_e(H)$;2) $|G|=|H|$。经过施武杰教授、V. D. Mazurov 教授等众多群论工作者的努力,证明了这一猜想是正确的[1-8]。在研究这一猜想的过程中,也有群论研究者对非单群进行了讨论,如毕建行教授在文献[9]中证明了对称群 S_n 可由其阶及其元素的阶的集合唯一刻画。除 S_n 外,还有许多有限群也可由群的阶及其元素的阶的集合刻画,如申红在文献[10]中证明了所有散在单群的自同构群也可由其阶及其元素的阶的集合唯一刻画。由于群中元素的阶的集合 $\pi_e(G)$是由群的所有元素的阶组成的集合,要得到这一集合一般是很困难的,因此本文考虑只用部分元素的阶及群的阶来刻画有限群。令 $K_1(G)$为 G 的最高阶元的阶,$K_2(G)$为 G 的次高阶元的阶,何立官利用对称群 S_n 的阶和 $K_1(S_n)$唯一刻画了 S_5、S_6、S_7[11]。本文在文献[11]的基础上利用不同的方法对对称群 S_n 作了进一步讨论,并得到了如下定理。

定理 设 G 为群,$S_n(n\leqslant 15)$为对称群,则 $G\cong S_n$ 当且仅当:1) $|G|=|S_n|$;2) $K_i(G)=K_i(S_n)$ $(i\leqslant 3)$。

本文所涉及的群均为有限群,单群均为非交换单群,G_p 为 G 的一个 Sylow p-子群,$K_i(G)$为 G 的第 i 高阶元的阶,其它所用的符号都是标准的[13-16]。

1 预备知识

设 M,N 为有限群,规定 $\pi_e(M)\pi_e(N)=\{mn\,|\,m\in\pi_e(M),n\in\pi_e(N)\}$。显然当 $m\in\pi_e(M)$时,m 的正因数也在 $\pi_e(M)$中。

引理 1 设 G 是 N 被 H 的扩张,则 $\pi_e(G)\subseteq\pi_e(H)\pi_e(N)$。

证明 由 G 是 N 被 H 的扩张知 $G/N\cong H$。对任意的 $g\in G$,设 gN 的阶为 t,则 $t\in\pi_e(H)$,且$(gN)^t=g^tN=N$。设$g^t=x\in N$,x 的阶为 $s\in\pi_e(N)$,则 $g^{ts}=1$,故 g 的阶为 ts 的因数。由于 t 的正因数都在 $\pi_e(H)$中,s 的正因数都在 $\pi_e(N)$中,所以 g 的阶在 $\pi_e(H)\pi_e(N)$中,即 $\pi_e(G)\subseteq\pi_e(H)\pi_e(N)$。 证毕

引理 2 设 $G\geqslant M>N\geqslant 1$ 为 G 的正规群列,$\overline{M}=M/N$ 为非交换单群,则在 G 中存在正规子群 C,使得$\overline{M}\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(\overline{M})$。

证明 令$\overline{G}=G/N$,由文献[15]中的 N/C 定理知

* **收稿日期**:2012-11-02 **修回日期**:2013-01-21 **网络出版时间**:2013-11-20 14:46

资助项目:国家自然科学基金(No. 11271301);中央高校基本科研业务费专项资金(No. XDJK2012D004)

作者简介:高彦伟,男,硕士,研究方向为有限群论,E-mail:mr.gao9521@163.com;**通讯作者**:曹洪平,E-mail:caohp@swu.edu.cn

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20131120.1446.201306.81_042.html

$$\mathrm{Aut}(\overline{M})\gtrsim N_{\overline{G}}(\overline{M})/C_{\overline{G}}(\overline{M})=\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{M})\geqslant C_{\overline{G}}(\overline{M})\overline{M}/C_{\overline{G}}(\overline{M})\cong\overline{M}/C_{\overline{G}}(\overline{M})\cap\overline{M}\cong\overline{M}$$

令 C 为 $C_{\overline{G}}(\overline{M})$ 在 G 中的原像,则 C 为 G 的正规子群,且 $G/C\cong\overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{M})$。从而 $\overline{M}\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(\overline{M})$。 证毕

显然对称群 S_1、S_2、S_3 均可由其阶及其最高阶元的阶唯一刻画。由文献[12]知,24阶群一共有15种,对称群 S_4 也可由其阶及其最高阶元的阶唯一刻画。在文献[11]中,何立官证明了 S_5、S_6、S_7 均可由其阶及其最高阶元的阶唯一刻画,所以本文只对 $S_n(8\leqslant n\leqslant 15)$ 进行讨论。为了方便,下面在表1中列出了对称群 $S_n(8\leqslant n\leqslant 15)$ 的阶及其一些较高阶元的阶。

2 定理的证明

定理的证明将由下面的3个定理给出。

定理1 设 G 为群,$S_n\in\{S_8,S_9,S_{11},S_{13},S_{14}\}$ 为对称群,则 $G\cong S_n$ 当且仅当:1) $|G|=|S_n|$;2) $K_1(G)=K_1(S_n)$。

证明 必要性是显然的,只需证充分性。

表1 对称群 $S_n(8\leqslant n\leqslant 15)$ 的阶及其一些较高阶元的阶

S_n	$\lvert S_n\rvert$	$K_1(S_n)$	$K_2(S_n)$	$K_3(S_n)$
S_8	$2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$	15		
S_9	$2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$	20		
S_{11}	$2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$	30		
S_{13}	$2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$	60		
S_{14}	$2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$	84		
S_{10}	$2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$	30	21	
S_{15}	$2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$	105	84	
S_{12}	$2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$	60	42	35

1) 当 $n=8$ 时,注意到 $|S_8|=2^7\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$,$K_1(S_8)=15$,证明分3步完成。

(a) G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$,使 M/N 为非交换单群,且 $5\cdot 7\mid |M/N|$。

设 $G=G_0>G_1>G_2>\cdots>G_{k-1}>G_k=1$ 为 G 的主群列,则存在 i 使得 $\pi(G_i)\cap\{5,7\}\neq\varnothing$,$\pi(G_{i+1})\cap\{5,7\}=\varnothing$。设 $M=G_i$,$N=G_{i+1}$,则 $G\geqslant M>N\geqslant 1$ 为 G 的正规群列,且 $\overline{M}=M/N$ 为 $\overline{G}=G/N$ 的极小正规子群。断言 $\{5,7\}\subseteq\pi(M)$。事实上,假设 $7\in\pi(M)$,而 $5\notin\pi(M)$,则 $5\in\pi(G/M)$。令 M_7 为 M 的 Sylow 7-子群,由 $7\mid\mid |G|$ 知 $|M_7|=7$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(M_7)M$,于是 $G/M\cong N_G(M_7)/N_G(M_7)\cap M$,故 $5\in\pi(N_G(M_7))$。于是 $N_G(M_7)$ 中有35阶子群,而35阶群是循环群,故 G 中有35阶元,这与 $K_1(G)=15$ 矛盾。所以当 $7\in\pi(M)$ 时,$5\in\pi(M)$。同理可知当 $5\in\pi(M)$ 时,$7\in\pi(M)$,故 $\{5,7\}\subseteq\pi(M)$。又 $\{5,7\}\cap\pi(N)=\varnothing$,所以 $\{5,7\}\subseteq\pi(M/N)$。由于 M/N 为同构单群的直积,而 $\pi(M/N)$ 至少包含2个不同的素数5和7,所以 M/N 为非交换单群的直积。又由于 $7\mid\mid |G|$,从而 $7\mid\mid |M/N|$,所以 M/N 为非交换单群,且 $5\cdot 7\mid |M/N|$。

(b) $M/N\cong A_8$。

由(a)知 M/N 为非交换单群,又 $|M/N|\mid|S_8|$,且 $5\cdot 7\mid|M/N|$,7为 $|M/N|$ 的最大素因子,由 Atlas 表知 M/N 可能同构于 A_7、$L_3(4)$ 或 A_8。若 $M/N\cong A_7$,则由引理2知,在 G 中存在正规子群 C,使得 $A_7\lesssim G/C\lesssim S_7$,比较阶有 $|C|=2^3$ 或 2^2。由于 $\pi_e(C)\subseteq\{1,2,4,8\}$,$\pi_e(S_7)\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,10,12\}$,所以 $15\notin\pi_e(C)\pi_e(S_7)$。但由引理1知 $K_1(G)=15\in\pi_e(G)\subseteq\pi_e(C)\pi_e(S_7)$,故矛盾。若 $M/N\cong L_3(4)$,则由引理2知,在 G 中存在正规子群 C,使得 $L_3(4)\lesssim G/C\lesssim\mathrm{Aut}(L_3(4))$。由于 $|\mathrm{Aut}(L_3(4))|=2^8\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$,比较阶知 $G/C\cong L_3(4)$ 或 $L_3(4).2$。若 $G/C\cong L_3(4)$,则比较阶有 $|C|=2$,$\pi_e(C)\subseteq\{1,2\}$,$\pi_e(L_3(4))\subseteq\{1,2,3,4,5,7\}$,所以 $15\notin\pi_e(C)\pi_e(L_3(4))$。但由引理1知 $K_1(G)=15\in\pi_e(G)\subseteq\pi_e(C)\pi_e(L_3(4))$,故矛盾。若 $G/C\cong L_3(4).2$,则比较阶有 $|C|=1$,从而 $G\cong L_3(4).2$。由文献[14]知 $15\notin\pi_e(L_3(4).2)$,这与 $K_1(G)=15$ 矛盾。综上可得 $M/N\cong A_8$。

(c) $G\cong S_8$。

若 $M/N\cong A_8$,则由引理2知,在 G 中存在正规子群 C,使得 $A_8\lesssim G/C\lesssim S_8$。若 $G/C\cong A_8$,则 $|C|=2$,G 中有30阶元。这与 $K_1(G)=15$ 矛盾,故 $G/C\cong S_8$,比较阶有 $C=1$,故 $G\cong S_8$。

2) 当 $n=9$ 时,注意到 $|S_9|=2^7\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$,$K_1(S_9)=20$,证明分3步完成。

(a) 同1)中(a)知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$,使 M/N 为非交换单群,且 $5\cdot 7\mid|M/N|$。

(b) $M/N\cong A_9$。

由(a)知 M/N 为非交换单群,又 $|M/N|\mid|S_9|$,且 $5\cdot 7\mid|M/N|$,7为 $|M/N|$ 的最大素因子,由 Atlas 表知 M/N 可能同构于 A_7、A_8、$L_3(4)$ 或 A_9。若 $M/N\cong A_7$,则由引理2知,在 G 中存在正规子群 C,使得 $A_7\lesssim G/C\lesssim S_7$,比较阶有 $|C|=2^4\cdot 3^2$ 或 $2^3\cdot 3^2$,于是 G 中存在子群 K,使得 $K/C\cong P_7$,P_7 为 A_7 或 S_7 的 Sylow 7-子群。由 C 可解,P_7 可解,知 K 可解,且 $|K|=2^4\cdot 3^2\cdot 7$ 或 $2^3\cdot 3^2\cdot 7$。从而 K 中有 $3^2\cdot 7$ 阶 Hall-子群 H,由文献[16]

知 H 中有 21 阶元，从而 K 中有 21 阶元，G 中有 21 阶元，这与 $K_1(G)=20$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 A_7。若 $M/N\cong A_8$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_8\lesssim G/C\lesssim S_8$。比较阶有 $|C|=2\cdot 3^2$ 或 3^2，同上可知 G 中有 21 阶元，这与 $K_1(G)=20$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 A_8。若 $M/N\cong L_3(4)$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $L_3(4)\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(L_3(4))$。由于 $|\mathrm{Aut}(L_3(4))|=2^8\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7$，比较阶知 $G/C\cong K$，$K=L_3(4)$，$L_3(4).2$，$L_3(4).3$ 或 $L_3(4).6$，于是 $|C|=2\cdot 3^2, 3^2, 2\cdot 3$ 或 3。由引理 1 知 $K_1(G)=20\in\pi_e(G)\subseteq\pi_e(C)\pi_e(K)$。但 $20\notin\pi_e(C)\pi_e(K)$，故矛盾。综上可得 $M/N\cong A_9$。

(c) $G\cong S_9$。

若 $M/N\cong A_9$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_9\lesssim G/C\lesssim S_9$。若 $G/C\cong A_9$，则 $|C|=2$，G 中有 30 阶元。这与 $K_1(G)=20$ 矛盾，故 $G/C\cong S_9$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_9$。

3) 当 $n=11$ 时，注意到 $|S_{11}|=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$，$K_1(S_{11})=30$，证明分 3 步完成。

(a) 同 1) 中 (a) 知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $7\cdot 11\mid |M/N|$。

(b) $M/N\cong A_{11}$。

由 (a) 知 M/N 为非交换单群，又 $|M/N|\mid |S_{11}|$，且 $7\cdot 11\mid |M/N|$，11 为 M/N 的最大素因子，由 Atlas 表及单群的阶知 M/N 可能同构于 M_{22} 或 A_{11}。若 $M/N\cong M_{22}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $M_{22}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(M_{22})$。比较阶有 $|C|=2\cdot 3^2\cdot 5$ 或 $3^2\cdot 5$。设 C_5 为 C 的 Sylow 5-子群，则 $|C_5|=5$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(C_5)C$，且 $7\mid |G|$，所以 $7\mid |N_G(C_5)|$，于是 $N_G(C_5)$ 中有子群 $K=C_5L$，且 $|L|=7$。由 C_5 正规于 K，L 正规于 K，故 $K=C_5\times L$，所以 K 中有 35 阶元，G 中有 35 阶元，这与 $K_1(G)=30$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 M_{22}。综上可得 $M/N\cong A_{11}$。

(c) $G\cong S_{11}$。

若 $M/N\cong A_{11}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{11}\lesssim G/C\lesssim S_{11}$。若 $G/C\cong A_{11}$，则 $|C|=2$，G 中有 42 阶元。这与 $K_1(G)=30$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{11}$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{11}$。

4) 当 $n=13$ 时，注意到 $|S_{13}|=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$，$K_1(S_{13})=60$，证明分 3 步完成。

(a) 同 1) 中 (a) 知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $11\cdot 13\mid |M/N|$。

(b) $M/N\cong A_{13}$。

由 (a) 知 M/N 为非交换单群，又 $|M/N|\mid |S_{13}|$，且 $11\cdot 13\mid |M/N|$，13 为 M/N 的最大素因子，由 Atlas 表及单群的阶知 M/N 只可能同构于 A_{13}，故 $M/N\cong A_{13}$。

(c) $G\cong S_{13}$。

若 $M/N\cong A_{13}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{13}\lesssim G/C\lesssim S_{13}$。若 $G/C\cong A_{13}$，则 $|C|=2$，G 中有 70 阶元。这与 $K_1(G)=60$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{13}$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{13}$。

5) 当 $n=14$ 时，注意到 $|S_{14}|=2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$，$K_1(S_{14})=84$，证明分 3 步完成。

(a) 同 1) 中 (a) 知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $7\cdot 13\mid |M/N|$，7 不整除 $|N|$。

(b) $M/N\cong A_{14}$。

由 (a) 知 M/N 为非交换单群，又 $|M/N|\mid |S_{14}|$，且 $7\cdot 13\mid |M/N|$，13 为 M/N 的最大素因子，由 Atlas 表及单群的阶知 M/N 可能同构于 $L_2(13)$，$L_2(27)$，$Sz(8)$，$L_2(64)$，A_{13} 或 A_{14}。若 $M/N\cong L_2(13)$，$L_2(27)$，$Sz(8)$，$L_2(64)$ 或 A_{13}，则 $7\mid\mid |M/N|$，而 $7^2\mid |G|$，7 不整除 $|N|$，故 $7\mid |G/M|$。同 (a) 的证明知 G 中有 91 阶元，这与 $K_1(G)=84$ 矛盾，故 $M/N\cong A_{14}$。

(c) $G\cong S_{14}$。

若 $M/N\cong A_{14}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{14}\lesssim G/C\lesssim S_{14}$。若 $G/C\cong A_{14}$，则 $|C|=2$，G 中有 90 阶元。这与 $K_1(G)=84$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{14}$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{14}$。　　证毕

定理 2　设 G 为群，$S_n\in\{S_{10}, S_{15}\}$ 为对称群，则 $G\cong S_n$ 当且仅当：1) $|G|=|S_n|$；2) $K_i(G)=K_i(S_n)$ $(i\leqslant 2)$。

证明　必要性是显然的，只需证充分性。

1) 当 $n=10$ 时，注意到 $|S_{10}|=2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$，$K_1(S_{10})=30$，$K_2(S_{10})=21$，证明分 3 步完成。

(a) 由定理 1 中 $n=8$ 时 (a) 的证明知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $5\cdot 7\mid |M/N|$，5 不整除 $|N|$。

(b) $M/N\cong A_{10}$。

由 (a) 知 M/N 为非交换单群，又 $|M/N|\mid |S_{10}|$，且 $5\cdot 7\mid |M/N|$，7 为 $|M/N|$ 的最大素因子，由 Atlas 表及

单群的阶知 M/N 可能同构于 $L_3(4)$、A_7、A_8、A_9、J_2 或 A_{10}。若 $M/N\cong L_3(4)$，A_7，A_8 或 A_9，则由 $5\mid\mid L_3(4)\mid$、$\mid A_7\mid$、$\mid A_8\mid$，$\mid A_9\mid$ 及 $5^2\mid\mid G\mid$，5 不整除 $\mid N\mid$ 知 $5\mid\mid G/M\mid$。同(a)的证明知 G 中有 35 阶元，这与 $K_1(G)=30$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 $L_3(4)$、A_7、A_8 或 A_9。若 $M/N\cong J_2$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $J_2\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(J_2)$。若 $G/C\cong J_2$，则 $\mid C\mid=2\cdot 3$。设 C_3 为 C 的 Sylow 3－子群，则 $\mid C_3\mid=3$，且 C_3 特征于 C，又 C 正规于 G，故 C_3 正规于 G。从而 $G/C_G(C_3)=N_G(C_3)/C_G(C_3)\lesssim \mathrm{Aut}(C_3)$。由于 $\mid \mathrm{Aut}(C_3)\mid=2$，所以 $\mid G/C_G(C_3)\mid=1$ 或 2。若 $\mid G/C_G(C_3)\mid=1$，则 $C_G(C_3)=G$。于是 $C_3\leqslant Z(G)$。由 $G/C\cong J_2$ 及 J_2 中有 8 阶元知 G 中有 8 阶元，又因为 $\mid C_3\mid=3$，所以 G 中有 24 阶元，这与 $K_1(G)=30$，$K_2(G)=21$ 矛盾。若 $\mid G/C_G(C_3)\mid=2$，则当 $C_G(C_3)\supseteq C$ 时，$G/C_G(C_3)\cong G/C/C_G(C_3)/C$，$C_G(C_3)/C$ 为 G/C 的指数为 2 的子群。但 $G/C\cong J_2$，J_2 中无指数为 2 的子群，故矛盾。当 $C_G(C_3)$ 不包含 C 时，$C_G(C_3)C=G$，于是 $G/C=C_G(C_3)C/C\cong C_G(C_3)C/C_G(C_3)\cap C=C_G(C_3)/C$。由于 $G/C\cong J_2$，J_2 中有 8 阶元，所以 $C_G(C_3)$ 中有 8 阶元，于是 $C_G(C_3)$ 中有 24 阶元，从而 G 中有 24 阶元。这与 $K_1(G)=30$，$K_2(G)=21$ 矛盾。综上可得 M/N 不同构于 J_2，所以 $M/N\cong A_{10}$。

(c) $G\cong S_{10}$。

若 $M/N\cong A_{10}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{10}\lesssim G/C\lesssim S_{10}$。若 $G/C\cong A_{10}$，则 $\mid C\mid=2$，G 中有 42 阶元，这与 $K_1(G)=30$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{10}$。比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{10}$。

2) 当 $n=15$ 时，注意到 $\mid S_{15}\mid=2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13$，$K_1(S_{15})=105$，$K_2(S_{15})=84$，证明分 3 步完成。

(a) 同定理 1 中 $n=8$ 时(a)的证明知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $11\cdot 13\mid\mid M/N\mid$。

(b) $M/N\cong A_{15}$。

由(a)知 M/N 为非交换单群，又 $\mid M/N\mid\mid\mid S_{15}\mid$，且 $11\cdot 13\mid\mid M/N\mid$，13 为 M/N 的最大素因子，由 Atlas 表及单群的阶知 M/N 可能同构于 A_{13}，A_{14} 或 A_{15}。若 $M/N\cong A_{13}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{13}\lesssim G/C\lesssim S_{13}$。若 $G/C\cong A_{13}$，则 $\mid C\mid=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$。设令 C_7 为 C 的 Sylow 7-子群，则 $\mid C_7\mid=7$。由 Frattini 论断有 $G=N_G(C_7)C$，且 $13\parallel\mid G\mid$，所以 $13\parallel\mid N_G(C_7)\mid$，于是 $N_G(C_7)$ 中有子群 $K=C_7L$，且 $\mid L\mid=13$。由 C_7 正规于 K，L 正规于 K，故 $K=C_7\times L$，所以 K 中有 91 阶元，G 中有 91 阶元，这与 $K_1(G)=105$，$K_2(G)=84$ 矛盾。若 $G/C\cong S_{13}$，则 $\mid C\mid=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$。于是 G 中存在子群 K，使得 $K/C\cong P_{13}$，P_{13} 为 S_{13} 的 Sylow 13-子群。由 C 可解，P_{13} 可解，知 K 可解，且 $\mid K\mid=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$。从而 K 中有 $5\cdot 7\cdot 13$ 阶 Hall-子群 H，由文献[15]知 H 为 455 阶循环群，从而 H 中有 455 阶元，K 中有 455 阶元，G 中有 455 阶元。这与 $K_1(G)=105$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 A_{13}。若 $M/N\cong A_{14}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{14}\lesssim G/C\lesssim S_{14}$。若 $G/C\cong A_{14}$，则 $\mid C\mid=2\cdot 3\cdot 5$。由 C 可解，故 C 中存在 $3\cdot 5$ 阶 Hall-子群 K，且 $\mid K\mid=15$，K 特征于 C。又 C 正规于 G，故 K 正规于 G。从而 $G/C_G(K)=N_G(K)/C_G(K)\lesssim \mathrm{Aut}(K)$。由于 $\mid \mathrm{Aut}(K)\mid=8$，故 $13\in\pi(C_G(K))$，所以 $C_G(K)$ 中有 $13\cdot 15=195$ 阶元，从而 G 中有 195 阶元，这与 $K_1(G)=105$ 矛盾。若 $G/C\cong S_{14}$，则 $\mid C\mid=3\cdot 5$。同上可知 G 中有 $13\cdot 15=195$ 阶元，这与 $K_1(G)=105$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 A_{14}。综上可得 $M/N\cong A_{15}$。

(c) $G\cong S_{15}$。

若 $M/N\cong A_{15}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{15}\lesssim G/C\lesssim S_{15}$。若 $G/C\cong A_{15}$，则 $\mid C\mid=2$，G 中有 210 阶元。这与 $K_1(G)=105$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{15}$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{15}$。　　证毕

定理 3　设 G 为群，S_{12} 为对称群，则 $G\cong S_{12}$ 当且仅当：1) $\mid G\mid=\mid S_{12}\mid$；2) $K_i(G)=K_i(S_{12})(i\leqslant 3)$。

证明　必要性是显然的，只需证充分性。

当 $n=12$ 时，注意到 $\mid S_{12}\mid=2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$，$K_1(S_{12})=60$，$K_2(S_{12})=42$，$K_3(S_{12})=35$，证明分 3 步完成。

(a) 同定理 1 中 $n=8$ 时(a)的证明知 G 有正规群列 $G\geqslant M>N\geqslant 1$，使 M/N 为非交换单群，且 $7\cdot 11\mid\mid M/N\mid$。

(b) $M/N\cong A_{12}$。

由(a)知 M/N 为非交换单群，$\mid M/N\mid\mid\mid S_{12}\mid$，且 $7\cdot 11\mid\mid M/N\mid$，11 为 M/N 的最大素因子，由 Atlas 表及单群的阶知 M/N 可能同构于 M_{22}、A_{11} 或 A_{12}。若 $M/N\cong M_{22}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $M_{22}\lesssim G/C\lesssim \mathrm{Aut}(M_{22})$。比较阶有 $\mid C\mid=2^3\cdot 3^3\cdot 5$ 或 $2^2\cdot 3^3\cdot 5$。令 C_5 为 C 的 Sylow 5-子群，则 $\mid C_5\mid=5$，由 Frattini 论断有 $G=N_G(C_5)C$，且 $11\parallel\mid G\mid$，所以 $11\mid\mid N_G(C_5)\mid$，于是 $N_G(C_5)$ 中有子群 $K=C_5L$，$\mid L\mid=11$。由 C_5 正规于 K，L 正规于 K，故 $K=C_5\times L$，所以 K 中有 55 阶元，G 中有 55 阶元，这与 $K_1(G)=60$，$K_2(G)=42$ 矛盾，所以 M/N 不同构于 M_{22}。若 $M/N\cong A_{11}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{11}\lesssim G/C\lesssim S_{11}$。比较阶有 $\mid C\mid=2^3\cdot 3$ 或 $2^2\cdot 3$。

显然 $35\notin\pi_e(C)\pi_e(S_{11})$。但由引理 1 知 $K_3(G)=35\in\pi_e(G)\subseteq\pi_e(C)\pi_e(S_{11})$，故矛盾。所以 M/N 不同构于 A_{11}。综上可得 $M/N\cong A_{12}$。

(c) $G\cong S_{12}$。

若 $M/N\cong A_{12}$，则由引理 2 知，在 G 中存在正规子群 C，使得 $A_{12}\lesssim G/C\lesssim S_{12}$。若 $G/C\cong A_{12}$，则 $|C|=2$，G 中有 70 阶元。这与 $K_1(G)=60$ 矛盾，故 $G/C\cong S_{12}$，比较阶有 $C=1$，故 $G\cong S_{12}$。　证毕

参考文献：

[1] Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups [C]// Cheng K N, Leng Y K. Group Theory-Porc Singapore Group Theory Conf. Berlin: Walter de Gruyter, 1989: 531-540.

[2] Shi W J, Bi J X. A characterization of the alternating groups [J]. Southeast Asian Bulletinof Mathematics, 1992, 16 (1): 81-90.

[3] Shi W J, Bi J X. A characterization of Suzuki-Reegroups [J]. Science in China, Ser A, 1991, 34(1): 14-19.

[4] Shi W J, Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group[J]. Lecture Notes in Math, 1990, 1456: 171-180.

[5] Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups[J]. J Progress in Nature Science, 1994, 4(3): 316-326.

[6] Cao H P, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J]. Sci China Ser A, 2002, 45: 761-772.

[7] Xu M C, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J]. Alg Coll, 2003, 10: 427-443.

[8] Vasil'ev A V, Grechkokoseeva M A, Mazurov V D. Characterization of the finite simple Groups by spectrum and order[J]. Algebra and Logic, 2009, 48(6): 385-409.

[9] 毕建行. 对称群的一个特征性质[J]. 数学学报, 1990, 33(1): 70-77.
Bi J X. A Characterization of Symmetric groups[J]. Acta Mathematica Sinica, 1990, 33(1): 70-77.

[10] Shen H, Cao H P, Chen G Y. Characterization of automorphism groups of sporadic simple groups[J]. Front Math China, 2012, 7(3): 513-519.

[11] 何立官. 群的阶及最高阶元素的阶与群的结构[D]. 重庆：西南大学，2012.
He L G. The structure of a finite group with its order and largest element order[D]. ChongQing: Southwest University, 2012.

[12] 李志秀. 阶为 24 的有限群的分类[J]. 晋中学院学报，2011, 28(3): 11-13.
Li Z X. A classification of finite groups of order 24[J]. Journal of Jinzhong University, 2011, 28(3): 11-13.

[13] HuppertB. Endliche gruppen I[M]. Heidelberg-NewYork: Spring-Verlag, 1967.

[14] Conway J H. Atlas of finite groups[M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[15] 徐明耀. 有限群论导引(上册)[M]. 北京：科学出版社，1999.
Xu M Y. The guidance of finite group theory (volume 1) [M]. Beijing: Science Press, 1999.

[16] 张远达. 有限群构造(上册)[M]. 北京：科学出版社，1982.
Zhang Y D. The structure of finite groups (volume 1) [M]. Beijing: Science Press, 1982.

A New Characterization of the Symmetric Groups S_n ($n\leqslant 15$)

GAO Yan-wei[1], CAO Hong-ping[2]

(1. The Personnel Department, Xinyang Normal University, Xinyang Henan 464000;
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: First, in this paper, we get the order of S_n ($n\leqslant 15$), the largest element order $k_1(S_n)$, the second largest element order $k_2(S_n)$, and the third largest element order $k_3(S_n)$ by calculation. Second, using the classification theorem of finite simple groups, we prove that S_n ($n=1,2\cdots,9,11,13,14$) can be characterized by $|S_n|$ and $k_1(S_n)$, namely, a finite group G is isomorphic to S_n if and only if $|G|=|S_n|$ and $k_1(G)=k_1(S_n)$. Finally, we prove that S_n ($n=10,12,15$) an be characterized by $|S_n|$ and $k_1(S_n)$, $k_2(S_n)$, $k_3(S_n)$, that is, a finite group G is isomorphic to S_n if and only if $|G|=|S_n|$ and $k_1(G)=k_1(S_n)$, $k_2(G)=k_2(S_n)$, $k_3(G)=k_3(S_n)$。

Key words: finite group; symmetric groups; the largest element order; the second largest element order

(责任编辑　黄　颖)